

О мерцании геометрии пространства-времени

А.П. Климец
aklimets@rambler.ru

(Получена 19 января 2010; опубликована 15 апреля 2010)

Выполнено интегрирование уравнения Эйнштейна для слабого гравитационного поля и проведен его анализ с квантово-теоретической точки зрения. Получено соотношение неопределенностей между гравитационным радиусом частицы и инвариантным интервалом, произведение неточностей которых больше либо равно квадрату планковской длины. С помощью полученного соотношения неопределенностей проанализированы классические уравнения общей теории относительности, геоны, гравитационный осциллятор. Показано, что на планковском уровне любые формы материи находятся в чернотырном состоянии - реальном или виртуальном. Показано, что 3-мерность пространства обусловлена его энергетической выгодностью на планковском уровне по сравнению с пространствами других размерностей. Обсуждается экспериментальное подтверждение полученных в статье выводов.

Введение

По отдельности квантовая механика и общая теория относительности Эйнштейна экспериментально подтверждены. Однако еще ни разу не исследовался случай, когда можно было бы проверить обе теории одновременно. Дело в том, что квантовые эффекты заметны лишь в малых масштабах, а для того, чтобы стали заметны эффекты общей теории относительности, требуются большие массы. Объединить оба условия можно лишь при каких-то экстраординарных обстоятельствах.

Помимо отсутствия экспериментальных данных существует огромная концептуальная проблема: общая теория относительности Эйнштейна полностью классическая, т.е. не квантовая. Для обеспечения логической целостности физики нужна квантовая теория гравитации, объединяющая квантовую механику с общей теорией относительности. И вот уже около 80 лет физиками всего мира предпринимаются отчаянные попытки в создании теории, объединяющей два столпа современной физики: общую теорию относительности и квантовую теорию. Однако, несмотря на многолетние активные исследования, никто пока так и не смог сформулировать последовательную и полную квантовую теорию гравитации. Сегодня двумя ведущими кандидатами на квантовую теорию гравитации являются теория струн и теория петлевой квантовой гравитации [4], [7], [8]. Я не буду пробовать рассматривать эти подходы. По мнению многих ученых, оба они неверны. Ниже же я изложу путь, идя по которому, можно достигнуть успеха в построении квантовой теории гравитации.

Квантование слабого гравитационного поля

Основное уравнение общей теории относительности (1) является нелинейным уравнением, существенно нелинейным. Для гравитационных полей несправедлив принцип суперпозиции. Поэтому его квантово-механическое решение вызывает серьезные затруднения [1]. Здесь мы рассмотрим не первоначальное уравнение Эйнштейна, а его линеаризованный вариант [10]. Это даёт возможность проанализировать его квантовомеханически. При этом обнаруживается выход в область планковских масштабов и энергий, что, видимо, указывает на верность избранного пути.

Основное уравнение Эйнштейна имеет вид

$$G_{ik} = (8\pi k/c^4) T_{ik} \quad (1)$$

где $G_{ik} = R_{ik} - 1/2 g_{ik}R$ - тензор Эйнштейна, T_{ik} - тензор энергии-импульса источника гравитационного поля, k - гравитационная постоянная, c - скорость света.

Перейдем к пределу слабого поля

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}, \quad |h_{ik}| \ll 1 \quad (2)$$

где η_{ik} - метрика Минковского.

В приближении слабого поля, используя систему координат, в которой справедливо (2), можно разложить уравнения поля по степеням h_{ik} и без большой потери точности удерживать только линейные члены. Получающийся формализм представляет собой теорию, имеющую право на самостоятельное существование и называющейся "линеаризованная теория тяготения". Фактически это как раз та теория, которая получается для классического поля, соответствующего квантовомеханическим частицам, имеющим: 1) нулевую массу покоя; 2) спин 2; и находящимся 3) в плоском пространстве-времени [11].

В [10] показано, что с учетом (2) уравнения поля Эйнштейна (1)

$$2G_{ik} = (16\pi k/c^4) T_{ik}$$

можно записать в виде

$$-\underline{h}_{ik,m}{}^m - \eta_{ik} \underline{h}_{mn,}{}^{mn} + \underline{h}_{im,}{}^m{}_{,k} + \underline{h}_{km,}{}^m{}_{,i} = (16\pi k/c^4) T_{ik} \quad (3)$$

где $\underline{h}_{ik} = h_{ik} - (1/2) \eta_{ik} h$

Первый член этих линеаризованных уравнений представляет собой обычный даламбертиан в плоском пространстве-времени, а остальные члены служат только для сохранения "калибровочной инвариантности" уравнений.

Не теряя общности, можно наложить "калибровочные условия"

$$\underline{h}{}^{im}{}_{,m} = 0 \quad (4)$$

Эти калибровочные условия являются тензорным аналогом лоренцевой калибровки $A{}^m{}_{,m} = 0$ электромагнитной теории. Уравнения поля (3) в таком случае принимают вид

$$-(1/2) \underline{h}_{ik,m}{}^m = (8\pi k/c^4) T_{ik} \quad (5)$$

"Калибровочные условия (4), уравнения поля (5) и определение метрики

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik} = g_{ik} = \eta_{ik} + \underline{h}_{ik} - (1/2) \eta_{ik} \underline{h} \quad (6)$$

представляют собой основные уравнения линеаризованной теории тяготения в лоренцевой калибровке." [10, т.2, с.70]

Далее. Пространство-время разделено на 1) внутреннюю область источника, которая окружена 2) вакуумной областью сильного поля, которая, в свою очередь окружена 3) асимптотически плоской зоной слабого поля. Здесь мы рассматриваем только асимптотически плоские области.

Источнику гравитационного поля можно приписать полную массу-энергию Mc^2 , 4-скорость U_i , полный 4-импульс P_i и вектор собственного момента импульса S_i . 4-векторы U_i , P_i , S_i могут существовать и свободно перемещаться в асимптотически плоской области пространства-времени (при пренебрежимо малой кривизне параллельный перенос

по замкнутым кривым не изменяет U_i , P_i и S_i), 4-скорость U_i определяется как 4-скорость асимптотически покоящейся системы отсчета ($U_0 = 1$, $U = 0$ в покоящейся системе отсчета). Полный 4-импульс определяется как $P_i = McU_i$.

Будем искать 4-импульс источника гравитационного поля. Линеаризованное уравнение поля Эйнштейна (5) можно проинтегрировать по 3-мерной гиперповерхности V^k .

$$\int (-g)^{1/2} G_{ik} dV^k = (8\pi k/c^4) \int (-g)^{1/2} T_{ik} dV^k \quad (7)$$

где $G_{ik} = -(1/2) \underline{h}_{ik,m}^m$

Тогда правая часть в (7) принимает вид

$$(8\pi k/c^4) \int (-g)^{1/2} T_{ik} dV^k = (4\pi 2k/c^3) P_i \quad (8)$$

где P_i - 4-импульс материи и является тензором в асимптотически плоской области, окружающей источник. Из объемного интеграла (8) с помощью теоремы Гаусса нетрудно вычислить интегральный гауссовый поток для полного 4-импульса источника, где замкнутая двумерная поверхность интегрирования должна полностью окружать источник. Отметим, что 4-импульс P_i в данном случае является сохраняющейся величиной. Пространство-время должно быть асимптотически плоским. Только в этом случае можно применять линеаризованную теорию и только на основе применимости линеаризованной теории вдали от источника можно обосновать использование интегралов в полной нелинейной теории. Никто не может заставить физика двигаться вблизи от источника. К тому же и нет необходимости так поступать. Требование, чтобы пространство-время было асимптотически плоским является решающей особенностью объемного интеграла (8). Даже координаты должны асимптотически переходить в координаты Минковского, иначе приведенные выше формулы будут не верны. *"При вычислении 4-импульса линеаризованной системы интегральный поток необходимо применять только в координатах, асимптотически переходящих в координаты Минковского. Если такие координаты не существуют (пространство-время не является асимптотически плоским на бесконечности), то необходимо полностью отказаться от интегрального потока и основанного на нем по определению величины 4-импульса гравитирующего источника. Линеаризованная теория гарантирует, что при преобразованиях Лоренца интеграл P_i будет преобразовываться как тензор в специальной теории относительности и он будет инвариантным относительно бесконечно малых преобразований координат (калибровочных преобразований)."* [10, т.2, с.100]

Левую часть уравнения (7) можно записать следующим образом

$$\int (-g)^{1/2} G_{ik} dV^k = 4\pi R_i \quad (9)$$

где $G_{ik} = -(1/2) \underline{h}_{ik,m}^m$

Каким образом можно интерпретировать величину R_i в (9)? Величина R_i имеет размерность длины. Тензор G_{ik} в (9) имеет размерность $см^{-2}$. Процедура интегрирования в (9) приводит к увеличению степени подынтегрального выражения. В данном случае происходит преобразование от отрицательной второй степени к положительной первой степени. Величина R_i в (9) связана с импульсом гравитационного поля, где роль массы с точностью до числового множителя принадлежит гравитационному радиусу источника поля. В общей теории относительности просто нет других претендентов размерности длины, прямо пропорционально связанных с энергией-импульсом частицы, кроме ее гравитационного радиуса. Покажем, что это действительно так.

Линеаризованное уравнение Эйнштейна (5) после интегрирования принимает следующий простой вид

$$R_i = (2k/c^3) P_i \quad (10)$$

Теперь запишем уравнения движения. 4-импульс P_i в (10) равен

$$P_i = Mc dx_i / ds$$

где M - масса источника, $dx_i / ds = U_i$ - его 4 - скорость. В частности, в случае статического поля $dx_\alpha / ds = 0$ ($\alpha = 1, 2, 3$), $dx_0 / ds = 1$ и из (10) мы будем иметь

$$R_0 = (2k/c^3) P_0 = (2k/c^3) Mc (dx_0 / ds) = (2k/c^2) M = R_g \quad (10')$$

В (10') R_0 есть не что иное как гравитационный радиус источника R_g , если положить, что след тензора энергии-импульса T равен нулю. Этот вывод получается из следующих соображений: гравитационный радиус R_g определен как

$$R_g = (2k/c^3) Mc$$

В статической ситуации полная масса $Mc = P_0$ равна

$$P_0 = Mc = 2/c \int (-g)^{1/2} (T_0^0 - (1/2)T) dV^0 = 1/c \int (-g)^{1/2} (T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3) dV^0$$

см [9, с. 447]. Эта формула выражает полную энергию материи и постоянного гравитационного поля (т.е. полную массу тела) через тензор энергии-импульса одной только материи.

Однако из (8) следует, что

$$P_0 = 1/c \int (-g)^{1/2} T_0^0 dV^0$$

Следовательно, уравнение (10') является правильным только в том случае, если след тензора энергии-импульса T равен нулю.

А.Эйнштейн в критическом 1915 году высказал мнение, что "существенной составной частью "материи" могут быть гравитационные поля. В таком случае хотя и может казаться, что величина T для всей системы положительна, в действительности положительна лишь величина $T + t$, (где t - след псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля), а T всюду обращается в нуль... Тот, кто не отклоняет заранее гипотезу, что молекулярные гравитационные поля являются существенной составной частью материи, обнаружит здесь сильную поддержку своему убеждению." [14].

Однако в [5] показано, что существенной составной частью материи на планковском уровне как раз и являются гравитационные поля. Как будет показано ниже, на планковском уровне любой вид материи неизбежно коллапсирует и превращается в планковские черные дыры, т.е. черные дыры с гравитационным радиусом 10^{-33} см. Можно утверждать, что планковская черная дыра является сгустком гравитационного поля и потому справедливы равенства $T = 0$ и $t > 0$. Смотрите также [3].

Тогда в общем случае уравнение (10) для гравитирующего источника в асимптотически плоской области можно записать следующим образом

$$R_i = (2k/c^3) Mc dx_i / ds = R_g U_i \quad (10'')$$

где R_g - гравитационный радиус источника, U_i - 4-скорость источника. Отсюда $U_i = R_i / R_g$. Сравните: $U_i = dx_i / ds$, а также $U_i = P_i / mc$.

Уравнение (10") $R_i = R_g U_i$ похоже на уравнение для четырехимпульса $P_i = mc U_i$, если в качестве массы принять величину гравитационного радиуса R_g . Поэтому с точностью до числового множителя величину R_i можно считать 4-импульсом гравитационного поля.

Теперь проанализируем уравнение (10) с квантово-теоретической точки зрения. Для перехода к квантовой теории заменим динамические переменные R_i и P_i операторами. Тогда в координатном представлении уравнение (10) примет вид

$$(\underline{P}_i - (c^3 / 2k) \underline{R}_i) \psi = 0 \quad (11)$$

где \underline{P}_i - оператор i -той компоненты 4-импульса материи, а \underline{R}_i - оператор i -той компоненты 4-импульса гравитационного поля. Из (11) получаем следующее уравнение

$$-i \hbar (\partial \psi / \partial x^i) - c^3 / 2k (R_i \psi) = 0 \quad (12)$$

где \hbar - постоянная Планка.

Уравнение (12) является основным уравнением квантовой теории гравитации для поля вдали от гравитирующих источников, в асимптотически плоской области пространства-времени. Это уравнение, видимо, описывает движение квантовой частицы в классическом гравитационном поле R_i . В этом случае к нему, скорее всего, нужно применить метод вторичного квантования для того, чтобы "уравнять в правах" квантовую частицу и гравитационное поле.

Кванты гравитационного поля определяются с помощью следующего выражения (смотри ниже по тексту)

$$R_i = 2 l_{nl}^2 k_i$$

где k_i - волновой 4 - вектор.

Уравнение (12) можно представить и как уравнение для собственных функций i -составляющей гравитационного импульса R_i :

$$R_i \psi = -2i (k \hbar / c^3) (\partial \psi / \partial x^i) \quad (13)$$

Уравнение (13) имеет решения при любых значениях параметра R_i . Следовательно, R_i не квантуется (спектр собственных значений R_i непрерывен). Из размерных соображений и из (13) следует, что оператор i -составляющей 4-импульса гравитационного поля R_i в координатном представлении будет иметь вид

$$\underline{R}_i = -2i l_{nl}^2 \partial / \partial x^i \quad (14)$$

где l_{nl} - фундаментальная планковская длина, которая появляется здесь автоматически, а не вводится искусственно в 4-мерный континуум, как, например, в теории струн [4].

Естественно, в этом случае уравнение (12) становится тривиальной идентичностью, где любая функция ψ удовлетворяет (12).

Из (13) следует, что собственные функции оператора гравитационного импульса R_i имеют вид плоских волн

$$\psi = \psi_0 \exp [(i / 2l_{nl}^2) R_i x^i] \quad (15)$$

Из выражения для оператора \underline{R}_i следует, что сопряженные компоненты R_i и x^i в планковских масштабах длин не коммутируют между собой

$$\underline{R}_i \underline{x}^i - \underline{x}^i \underline{R}_i = - 2i \ell_{nl}^2 \quad (16)$$

где \underline{R}_i и \underline{x}^i - операторы. Отсюда также следует соотношение неопределенностей

$$\Delta R_i \Delta x^i \geq \ell_{nl}^2 \quad (17)$$

т.е. чем меньше неопределенность координаты x^i , тем больше неопределенность сопряженной i -той компоненты гравитационного импульса поля источника R_i и наоборот.

Действительно, согласно определению 4-векторов, производные $\partial \psi / \partial x^i$ составляют ковариантный вектор, где $\psi = \psi(x^i)$ - скалярная функция. Тогда находим, что произведение операторов \underline{R}_i и \underline{x}^i некоммутативно

$$\begin{aligned} (\underline{R}_i \underline{x}^i - \underline{x}^i \underline{R}_i) \psi(x^i) &\equiv - 2i \ell_{nl}^2 \partial / \partial x^i [x^i \psi(x^i)] - \\ &- x^i (- 2i \ell_{nl}^2) \partial / \partial x^i [\psi(x^i)] = - 2i \ell_{nl}^2 \psi(x^i) \end{aligned}$$

Подчеркнем, что по i в последнем уравнении нет суммирования.

Соотношение неопределенностей (17) можно преобразовать следующим образом

$$\Delta R_i \Delta x^i \geq \ell_{nl}^2 = \Delta (R_g U_i) \Delta (S U^i) \geq \ell_{nl}^2$$

где R_g - гравитационный радиус, S - инвариантный интервал, U_i - 4- скорость. И так как $U_i U^i = 1$, то мы получаем следующее соотношение неопределенностей

$$\Delta R_g \Delta S \geq \ell_{nl}^2 \quad (17')$$

Из соотношения неопределенностей (17) или (17') следует, что в планковских масштабах длин при попытке более точного определения координаты источника (точнее, чем интервал 10^{-33} см), увеличивается неопределенность гравитационного радиуса источника, который становится больше длины 10^{-33} см. Получить точную информацию о координате источника, спрятанного под горизонтом событий, становится практически невозможно (источник в таких масштабах превращается в черную дыру). С другой стороны, когда гравитационный радиус источника становится меньше планковской длины, неопределенность координаты источника растет и определить точное местоположение его горизонта событий также невозможно.

Соотношения неопределенностей (17) или (17') говорят о том, что: *"масштаб Планка является пределом расстояния, меньше которого сами понятия пространства и длины перестают существовать. Любая попытка исследовать существование более коротких расстояний (меньше, чем 10^{-33} см), осуществляя столкновения при более высоких энергиях, неизбежно закончилась бы рождением черной дыры. Столкновения при больших энергиях, вместо того, чтобы дробить вещество на более мелкие кусочки, приведут к рождению черных дыр все большего размера."* [13]. Действительно, уменьшение пространственно-временного интервала S , согласно соотношению (17'), ведет к увеличению гравитационного радиуса R_g , то есть к рождению черной дыры большего размера. Таким образом, появление планковских черных дыр знаменует конец важного направления науки.

Из (17) видно, что гравитационный радиус источника и его координата флуктуируют (мерцают) в пределах планковской длины. Физическая материя в планковском масштабе длин существует только в чернотырном состоянии. Поэтому планковская длина 10^{-33} см является минимально возможной измеримой длиной, допустимой в физике микромира.

"Эти мелкомасштабные флуктуации говорят о том, что повсюду в пространстве все время происходит нечто похожее на гравитационный коллапс, что гравитационный

коллапс по существу постоянно совершается, но постоянно совершается и обратный процесс, что кроме гравитационного коллапса Вселенной и звезды необходимо рассматривать также третий тип коллапса и, поскольку для него непрерывно идет обратный процесс, наиболее важен уровень гравитационного коллапса при планковском масштабе расстояний". [10, т.3, с.459]

Сделаем замечание относительно соотношения неопределённостей (17) или (17'). Неопределённость несёт смысл среднеквадратичной ошибки измерения. Нужно как-то измерить x^i и R_i на планковских масштабах, чтобы получить эту ошибку? За этими символами стоит (должна стоять) процедура измерения. Иначе это не наблюдаемые величины, и тогда их не имеет смысла вводить в теорию. В чём и смысл, и парадоксальность квантовой механики. Но инструменты для измерения реальны только до границы планковских масштабов [5]. Далее они сами коллапсируют, превращаются в планковские черные дыры.

Однако сущность соотношения неопределенностей состоит не столько в том, что координату x^i и гравитационный импульс R_i нельзя одновременно измерить, сколько в том, что эти понятия в ряде случаев не являются точно определенными. Соотношение неопределенностей (17) - это не следствие принципиального несовершенства измерительных приборов, а математическая теорема. Обычно говорят, что соотношение неопределенностей возникает из-за взаимодействия измерителя и измеряемого объекта. Но это соотношение возникает с самого начала, еще до вопроса об измерении. Соотношение неопределенностей (17) является следствием аппарата квантовой механики. Неопределенность, выражаемая соотношением (17), возникает из-за того, что мы пытаемся измерить то, что не имеет определенного значения.

Некоторые результаты, вытекающие из гравитационного соотношения неопределенностей $\Delta R_g \Delta S \geq l_{пл}^2$

1. Оценка выражения для пространственно-временной метрики dS^2 на планковском уровне. Позволяя довольно простым путем получить важные оценки, найденное соотношение неопределенностей (17) или (17') оказывается полезным рабочим инструментом квантовой теории гравитации. В качестве примера рассмотрим выражение для пространственно-временной метрики dS^2 для центрально-симметричного гравитационного поля. В классической общей теории относительности оно имеет вид

$$dS^2 = (1 - R_g / R) c^2 dt^2 - dR^2 / (1 - R_g / R) - R^2 (d\Omega^2 + \sin^2 \Omega d\varphi^2) \quad (18)$$

Чтобы использовать классическое выражение (18) в квантовой теории гравитации, будем рассматривать величины R_g и R , входящие в него, как неопределенности соответственно гравитационного радиуса и координаты частицы. Согласно соотношению (17'), эти величины связаны друг с другом

$$R_g R \approx l_{пл}^2 \text{ или проще } R_g R = l_{пл}^2 \quad (19)$$

Отсюда получаем $R_g = l_{пл}^2 / R$

Используя это выражение, исключим величину R_g из (18). Получим

$$dS^2 = (1 - l_{пл}^2 / R^2) c^2 dt^2 - dR^2 / (1 - l_{пл}^2 / R^2) - R^2 (d\Omega^2 + \sin^2 \Omega d\varphi^2) \quad (20)$$

Из (20) мы видим, что метрика пространства-времени ограничена снизу планковской

длиной l_{nl} . На планковском уровне материя переходит в чернотырное состояние, коллапсирует.

Аналогичным образом необходимо поступить и с другими выражениями, получаемыми в рамках общей теории относительности. Здесь мы, конечно, предполагаем, что канонические уравнения классической общей теории относительности сохраняют свой вид и на планковском уровне.

В макроскопической физике, встречаясь с тяжелым телом, надо прежде всего оценить его гравитационный радиус, и мы уже будем знать многое о величине эффектов, связанных с общей теорией относительности. Например, масштаб изменения хода часов определяется безразмерным параметром ξ , т.е. отношением гравитационного радиуса R_g к расстоянию до центра притяжения R .

$$\xi = R_g / R$$

Для Солнца он составляет примерно $4 \cdot 10^{-6}$ или $1,76''$, то есть луч света, проходя вблизи края диска Солнца, отклонится на величину порядка $4 \cdot 10^{-6}$ радиан. Для Меркурия этот параметр будет составлять 10^{-7} , что за сто земных лет дает для смещения перигелия Меркурия $43''$. С помощью этого безразмерного параметра можно также оценить, например, скорость Меркурия, приравняв центробежную силу инерции центростремительной силе. Этот же параметр входит и в третий закон Кеплера (о чем его автор, конечно, и не подозревал). Не удивительно, что R_g входит и во все остальные оценки: просто никакой другой величины размерности длины, кроме R_g , составить нельзя. Но, как мы выяснили выше, отношение R_g / R на планковском уровне имеет вид l_{nl}^2 / R^2 , поэтому для того, чтобы сделать оценку любого соотношения, получаемого в рамках классической общей теории относительности применительно к планковскому уровню, необходимо отношение R_g / R заменить выражением l_{nl}^2 / R^2 . Тогда, например, в центрально-симметричном гравитационном поле метрический коэффициент g_{00} будет иметь вид

$$g_{00} = 1 - l_{nl}^2 / R^2$$

Аналогично, чтобы оценить величину флуктуаций скорости света (отклонение скорости света от классического значения) на планковском уровне при распространении его в гравитационном поле на расстояние R , необходимо руководствоваться следующим соотношением

$$c' = c(1 + 2\Phi/c^2) = c(1 - R_g/R) = c(1 - l_{nl}^2 / R^2)$$

Видно, что флуктуации скорости света наиболее значительны именно на планковском уровне и их величина определяется не планковской длиной l_{nl} , а ее квадратом l_{nl}^2 .

Отметим также, что при исследовании проблемы измеримости средних гравитационных полей [19] величина напряженности поля Γ , метрический тензор g , ускорение силы тяжести a , гравитационный потенциал Φ , могут быть измерены также с ошибкой, пропорциональной отношению l_{nl}^2 / R^2 .

2. Оценка линейных размеров геона.

Из общей теории относительности известно, что любая форма энергии, в том числе энергия безмассовых квантов, способна генерировать гравитационное поле. Отсюда следует, что два одиночных фотона могут между собой гравитационно взаимодействовать и, таким образом, образовать связанную систему - геон.

В рамках классической физики Ньютона потенциальная энергия $E_{ном}$, создаваемая гравитационными полями масс M и m , имеет вид

$$E_{ном} = - kMm / R \quad (21)$$

где k - постоянная тяготения Ньютона, M и m - гравитирующие массы, R - расстояние между массами.

Воспользуемся соотношением (21) применительно к системе из двух гравитационно взаимодействующих фотонов одинаковой энергии. Для фотонов вместо масс M и m нужно подставить величины импульсов фотонов, делённых на скорость света, т.е. P/c . Тогда (21) переписывается следующим образом

$$E_{ном} = - kP^2 / c^2 R \quad (22)$$

Задачу о движении двух фотонов, взаимодействующих только друг с другом, по аналогии с двумя взаимодействующими массивными частицами, можно свести к задаче о движении одного фотона. Приведенный импульс системы из двух одинаковых фотонов равен $P' = P/2$, где P' - приведенный импульс, P - импульс каждого из фотонов.

Тогда полная энергия геона (в первом приближении) принимает следующий вид

$$E = E_{кин} + E_{ном} = P'c - kP^2/c^2 R = Pc/2 - kP^2/c^2 R \quad (23)$$

где $E_{кин} = P'c$ - кинетическая энергия системы из двух фотонов; c в первом слагаемом - относительная скорость фотонов, равная скорости света.

Уравнение (23) можно переписать следующим образом

$$E = Pc/2 (1 - R_g / R) \quad (24)$$

где $R_g = 2kP/c^3$ - так называемый *гравитационный радиус геона*, который, как нетрудно видеть, отличается по форме от гравитационного радиуса обычных частиц, имеющего вид $R_g = 2kM/c^2$. Это связано с тем, что в геоне M необходимо заменить на P/c .

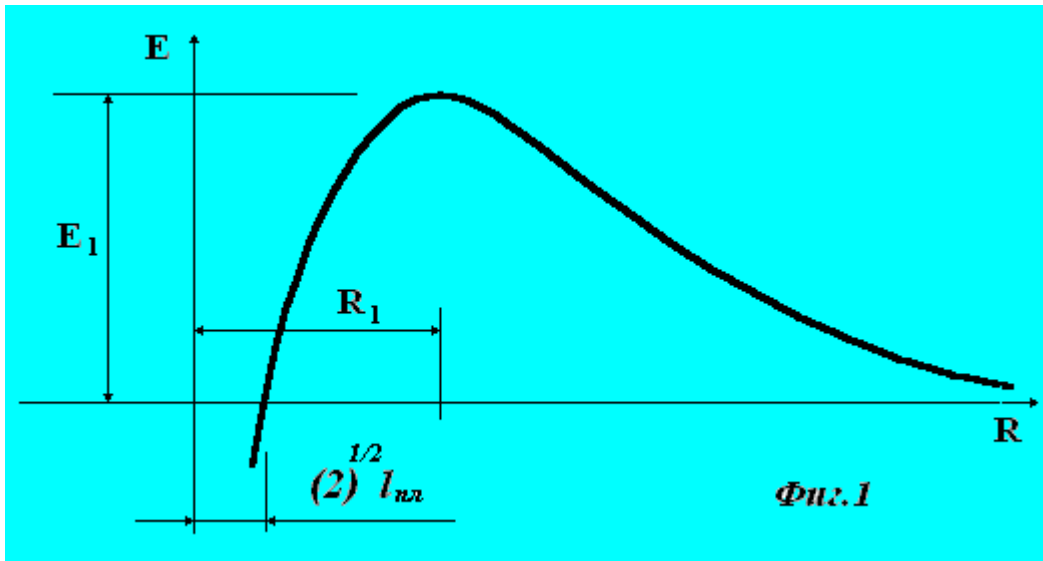
Уравнение (23) аналогично уравнению для полной энергии атома водорода. Из квантовой механики известно, что оценить энергию основного состояния атома водорода можно с помощью соотношения неопределенностей Гейзенберга. Аналогичным образом мы поступим и в данном случае, хотя мы могли бы с полным правом сразу подставить в (24) вместо величины R_g/R величину l_{nl}^2/R^2 , согласно (19). Чтобы использовать уравнение (23) в квантовой теории (в качественном приближении), будем рассматривать величины P и R , входящие в уравнение (23), как неопределенности импульса и координаты. Отметим, что R в (23) характеризует размер области, занимаемой геонем. С другой стороны, R можно трактовать, как радиус кривизны траектории фотонов.

Согласно соотношению неопределенностей, величины P и R связаны друг с другом. Положим $PR = \hbar$, где \hbar - постоянная Планка. Используя соотношение неопределенностей, найдем из (23) зависимость $E(R)$. Имеем

$$E(R) = \hbar c/2R - \hbar^2 k/c^2 R^3 = \hbar c/2R(1 - 2l_{nl}^2/R^2) \quad (25)$$

где l_{nl} - фундаментальная планковская длина.

Величина $g_{00} = 1 - 2l_{nl}^2/R^2$ является ничем иным, как метрическим коэффициентом g_{00} при временной координате пространственно-временного интервала S .



Если на основании уравнения (25) построить график функции $E(R)$ (фиг.1), то мы увидим, что максимальная энергия, которую смогут достигнуть фотоны, чтобы образовать связанную систему - геон, будет примерно равна планковской энергии $E_{nl} \sim 10^{19}$ ГэВ, при этом длина волны фотонов λ будет почти сопоставима с планковской длиной. Если импульсы фотонов увеличивать и далее, то полная энергия геона начнет уменьшаться за счет преобладания отрицательной гравитационной составляющей в полной энергии геона (25), которая до этого момента не играла существенной роли. При длине волны фотонов λ равной планковской длине l_{nl} полная энергия геона становится равной нулю, геон коллапсирует и превращается в микроскопическую планковскую черную дыру с гравитационным радиусом $R_g = l_{nl} = 10^{-33}$ см.

В общей теории относительности уравнение (23) (уравнение Гамильтона-Якоби) обобщается и принимает вид

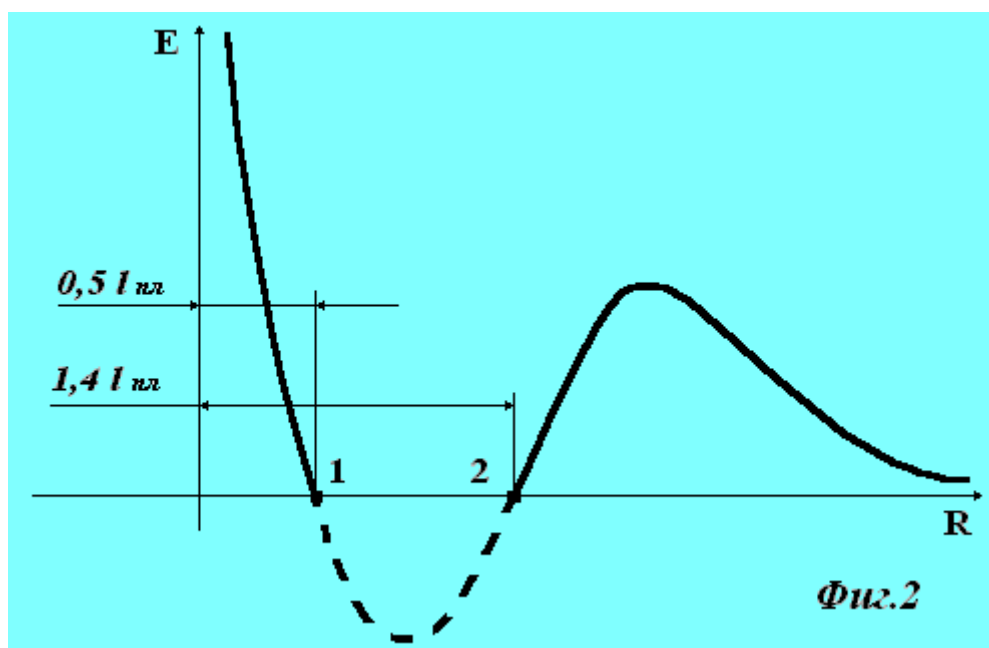
$$E^2 = (1 - 2kP/Rc^3)^2 (P^2 c^2)/4 + (1 - 2kP/Rc^3) M^2 c^2/R^2 \quad (26)$$

где M - орбитальный момент импульса геона.

Или, если подставить $P = n \hbar / R$ и $M^2 = \hbar^2 j(j+1)$, где n - главное квантовое число, j - квантовое число полного момента импульса, то (26) примет вид

$$E^2 = n^2 \hbar^2 c^2 / 4R^2 (1 - 2 l_{nl}^2 n / R^2)^2 + \hbar^2 c^2 / R^2 (1 - 2 l_{nl}^2 n / R^2) [j(j+1)] \quad (27)$$

Уравнение (27) с качественной квантотеоретической точки зрения является основным уравнением для полной энергии геона и подробно рассматривается в [5], где показано, что благодаря наличию момента импульса геона планковская черная дыра обладает двумя горизонтами событий, внешним и внутренним (так называемым горизонтом Коши) (фиг.2, точки 2 и 1).



3. Почему пространство трехмерно?

С современной точки зрения вопрос: "Почему пространство имеет три измерения?" может пониматься в двух существенно различных смыслах.

Во-первых, можно попытаться объяснить трехмерность пространства исходя из глубоких свойств материального мира в рамках некоей фундаментальной теории. В существующих же физических теориях трехмерность пространства берется в качестве исходного предположения, постулата.

Второй смысл, который можно вложить в этот вопрос, можно уточнить так: "Почему физики уверены в том, что пространство имеет три измерения".

Исторически именно Иммануилу Канту - одному из великих философов - принадлежит подлинно новая идея в вопросе о размерности пространства. В работе Канта понятие размерности впервые было связано с конкретным физическим законом (законом тяготения Ньютона) и оказалось причастным к одному из знаменитых идейных противоборств в истории физики - соперничеству концепций абсолютности и относительности пространства.

Первая из них предполагает, что пространство есть нечто абсолютное, заданное, нечто, подобное готовой сцене, на которой разыгрываются физические явления, но которая не зависит от самих этих явлений. Идея же относительности пространства означает, что пространственные отношения - это лишь некоторые отношения физических тел между собой. Кант писал: "Если пространство и можно уподобить сцене, то эта сцена создается в ходе самого спектакля, создается физическими явлениями, взаимодействиями между телами. И существующей независимо от взаимодействий эту сцену нельзя даже помыслить..." [21], [23].

Кант обосновывает связь размерности пространства с законом силы следующим образом: пространство есть упорядоченность, порядок в совокупности тел, пространство - отношение тел. Однако сами эти отношения проявляются в силах, действующих между телами: "Легко доказать, что не было бы никакого пространства и никакого протяжения, если бы субстанции не обладали никакой силой действовать вовне. Ибо без этой силы нет

никакой связи, без связи - никакого порядка и, наконец, без порядка нет никакого пространства...".

Далее Кант выдвигает гипотезу, что "трехмерность происходит, по-видимому, от того, что субстанции в существующем мире действуют друг на друга таким образом, что само действие обратно пропорционально квадрату расстояния" (других сил взаимодействия на расстоянии Кант не знал).

Концепция абсолютного пространства победила (хотя и не полностью) в механике Ньютона и царствовала в физике вплоть до начала XX века, когда в общей теории относительности Эйнштейна победила (хотя опять таки не полностью) идея относительности пространства.

Таким образом, никакого пространства самого по себе, как особой физической сущности, в природе нет. С релятивистской точки зрения понятие "пространство" выражает только совокупность отношений, складывающихся в движении и взаимодействии реальных физических объектов. Вакуум нельзя определить как пространство. В вакууме между виртуальными частицами нет отношений взаимодействия, нет связи, нет порядка, а значит не возникает пространства отношений с той или иной размерностью. Размерность пространства появляется во взаимодействиях реальных объектов, в их отношениях. Тогда очевидно, что взаимодействия в трех независимых направлениях чем-то предпочтительнее, чем взаимодействия в n - независимых направлениях.

Гипотезу Канта впоследствии развил П. Эренфест в статье "Каким образом в фундаментальных законах физики проявляется то, что пространство имеет три измерения?" [22] и показал, что только в пространстве трех измерений возможны устойчивые структуры - планетные системы, атомы и т.п. Работа Эренфеста соответствует как раз второму смыслу вопроса о размерности пространства. Мы же в данной заметке покажем, как можно обосновать трехмерность пространства исходя из более глубоких свойств материального мира.

В современной науке наиболее глубокую физическую теорию пространства и времени дает общая теория относительности, созданная Эйнштейном. Поскольку размерность - одно из наиболее фундаментальных свойств пространства-времени, то невозможно всерьез рассматривать проблему размерности вне ее связи с общей теорией относительности. А из общей теории относительности следует существование в природе таких экзотических объектов, как черные дыры.

Оказывается, трехмерность наблюдаемого физического пространства напрямую связана с образованием таких черных дыр. Покажем, что в рамках модели геона можно ответить на вопрос: "почему у наблюдаемого пространства именно три измерения?". При рассмотрении этого вопроса мы воспользуемся результатами, полученными в свое время П. Эренфестом.

Эренфест рассматривает "физику" в n -мерном пространстве U^n . При этом закон взаимодействия с точечным центром он выводит (аналогично трехмерному случаю) из дифференциального уравнения Пуассона в U^n для потенциала, определяющего это взаимодействие.

Фундаментальные физические законы взаимодействий задаются в вариационной форме. Лагранжиан для простейшего случая скалярного безмассового поля $\varphi(t, x^1, x^2, \dots, x^n)$ имеет вид.

$$L = (\partial \varphi / \partial t)^2 - \sum (\partial \varphi / \partial x^k)^2 \quad (28)$$

Этот лагранжиан приводит к уравнению Пуассона и, следовательно, к полю точечного

центра $\varphi \sim R^{n-2}$ ($\varphi \sim \ln R$ при $n=2$). Размерность пространства учитывается в (28) только в виде условия на множество значений, которые может принимать индекс k . В 3+1-мерном случае $k = 1, 2, 3$. Таким образом, (28) позволяет получить соответствующую часть физики в пространстве любой размерности. Уравнение Пуассона как раз математически эквивалентно указанному лагранжиану (с естественным обобщением на другие поля).

В сферически-симметричном случае в U^n из уравнения Пуассона или из закона Гаусса для напряженности поля следуют выражения для потенциальной энергии

$$E_{nom} = -k Mm / (n-2) R^{n-2}; \dots n \geq 3 \quad (29)$$

$$E_{nom} = k Mm \ln R; \dots n = 2 \quad (30)$$

$$E_{nom} = k Mm R; \dots n = 1 \quad (31)$$

где M, m - массы тел, k - константа взаимодействия в n -мерном пространстве. С обычной постоянной Ньютона G она находится через сшивку потенциалов для 3-мерного пространства и соответствующего n -мерного пространства. Тогда для гравитационно взаимодействующих фотонов выражения (29), (30), (31) примут следующий вид (с учетом того, что вместо масс M и m необходимо подставить P/c)

$$E_{nom} = -k P^2 / c^2 (n-2) R^{n-2} = -k \hbar^2 / c^2 (n-2) R^2 R^{n-2} \quad (29')$$

$$E_{nom} = k P^2 \ln R / c^2 = k \hbar^2 \ln R / c^2 R^2 \quad (30')$$

$$E_{nom} = k P^2 R / c^2 = k \hbar^2 / c^2 R \quad (31')$$

где c - скорость света, \hbar - постоянная Планка. В полную потенциальную энергию системы входит и центробежная энергия геона $P\varphi c = N c / R$ форма которой, однако, не зависит от размерности пространства, точно также, как не зависит от размерности пространства форма для кинетической энергии «приведенного» фотона $E = P' c$, где $P' = P/2$. С другой стороны, центробежная энергия играет роль только в третьем приближении, поэтому далее в выражениях для полной энергии геона в пространствах U^n мы не будем ее учитывать (в целях упрощения графиков). Тогда уравнения для полной энергии геона в пространствах U^n будут иметь вид (при условии, что $(k = c = \hbar = 1)$).

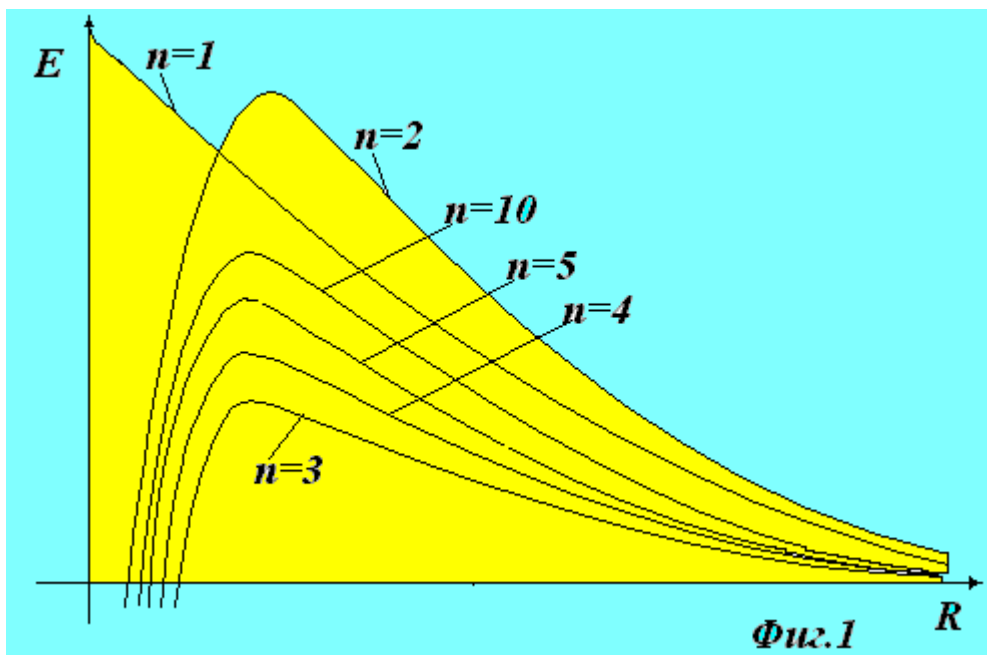
$$E(R) = (1 - 2 / (n-2) R^{n-1}) / 2R; \quad n \geq 3 \quad (32)$$

$$E(R) = (1 + 2 \ln R / R) / 2R; \quad n = 2 \quad (33)$$

$$E(R) = 1,5 / R; \quad n = 1 \quad (34)$$

Обратим внимание на то, что на графиках зависимости энергии геона от R (см.[3]) точка максимума является характерной точкой, лежащей в области энергий $E_{пл} = 10^{19}$ Гэв. Именно в ней начинается "падение" фотонов на гравитирующий "центр" и образование планковской черной дыры.

Построим графики зависимости полной энергии геона $E(R)$ в пространствах с размерностями 1,2,3,4,5,...,n в соответствии с соотношениями (32), (33), (34) (см.фиг.1).



Из фиг.1 видно, что максимумы кривых $E(R)$ в пространствах $U^1, U^2, U^4, U^5, \dots, U^n$ лежат выше максимума кривой $E(R)$ в U^3 . Это означает, что образование планковских черных дыр, с энергетической точки зрения, наиболее выгодно в U^3 . Из фиг.1 видно, что планковские черные дыры могут образовываться и в пространствах других размерностей (кроме U^1), но минимальная энергия фотонов, необходимая для образования планковских черных дыр, присуща именно 3-мерному пространству. Возможно, это справедливо и для полной энергии любых других взаимодействий в поле центральных сил.

Если исходить из принципа, что любая физическая система стремится реализоваться в состоянии с наименьшей энергией, то вполне очевидно, что, благодаря механизму образования планковских черных дыр в n -мерных пространствах, выбор трехмерного пространства из всех других возможностей при формировании наблюдаемой Метагалактики был заранее предreshен.

Действительно, согласно современным представлениям, наблюдаемая Метагалактика возникла около 13 млрд. лет тому назад из сингулярной "точки" с размером 10^{-33} см, то есть, согласно предыдущим выводам, наша Метагалактика появилась из "чернодырного" состояния физической материи. Отсюда с неизбежностью следует трехмерность наблюдаемого пространства.

Если к тому же учесть, что вакуум на планковском (самом глубоком) уровне состоит из виртуальных планковских черных дыр, возникновение которых также энергетически наиболее выгодно в пространстве размерности три, то выбор трехмерного пространства очевиден. Действительно, свойство пространства быть n -мерным в точке p , топологически инвариантно [24]. Поэтому мы должны принять к сведению четырехмерный характер (пространство плюс время) элементарного физического события в микромире в качестве источника размерности реального пространства-времени. Но на планковском уровне нет других событий, кроме образования реальных и виртуальных планковских черных дыр. Таким образом, трехмерность наблюдаемого пространства (или четырехмерность пространства-времени) обусловлена исключительно "кипением" планковского вакуума. В планковских масштабах длин пустое пространство вовсе не является пустым - оно представляет собойместилище самых бурных физических

процессов. Причем эти процессы есть не что иное, как гравитационный коллапс, который непрерывно и всюду совершается, но вместе с тем совершается процесс, обратный коллапсу. Коллапс при планковском масштабе длин происходит всюду и непрерывно в виде квантовой флуктуации геометрии и, по-видимому, топологии пространства. В этом смысле коллапс постоянно протекает, но вместе с тем постоянно идет обратный процесс. И так как образование планковских черных дыр энергетически наиболее выгодно именно в 3-х мерном пространстве, то это и обуславливает трехмерность наблюдаемого пространства.

Данный вывод противоречит антропному принципу, который утверждает, что мы живем в 3-мерном пространстве потому, что Вселенные с другими размерностями существуют без наблюдателей или законы Природы устроены таким образом, чтобы во Вселенной могла возникнуть разумная жизнь. Однако, как здесь показано, Вселенных с другими размерностями не должно быть в силу их энергетической невыгодности. Вселенная с размерностью $n=3$ находится в основном, низшем энергетическом состоянии. Перестройка пространственных отношений, рождение пространств с размерностями $n < 3$ или $n > 3$ потребовало бы дополнительных затрат энергии.

4. Оценка линейных размеров гравитационного осциллятора, на котором становятся заметными отклонения от евклидовой геометрии.

Уравнением движения гармонического осциллятора будет уравнение

$$m \, d^2x / dt^2 = P_x^2 / m = - b \, x \quad (35)$$

где $w = (b/m)^{1/2}$ - собственная частота осциллятора, $- b \, x$ - возвращающая сила. Тогда уравнение для энергии классического одномерного осциллятора, будет выглядеть следующим образом

$$E = E_{кин} + E_{пот} = P_x^2 / 2m + mw^2x^2 / 2 \quad (36)$$

Известно, что гармоническое колебательное движение и движение по окружности математически сходны. Поэтому систему из двух гравитационно связанных фотонов, вращающихся вокруг общего центра тяжести (геон), мы можем рассматривать в качестве гармонического осциллятора. Тогда в (35) в качестве возвращающей силы $- b \, x$ мы должны подставить силу гравитационного притяжения двух фотонов одинаковой энергии km^2/x^2 , заменив соответственно m на P/c

$$P_x^2 / m = Pc/2 = km^2/x^2 = kP^2 / c^2x^2 \quad (37)$$

И для энергии такого осциллятора мы опять приходим к соотношению

$$E = E_{кин} + E_{пот} = P'c - kP^2/c^2R = Pc/2 - kP^2/c^2R \quad (38)$$

или

$$E = Pc/2 (1 - R_g / R) \quad (39)$$

Заменив в (39) R_g / R на величину $l_{пл}^2 / R^2$ мы придем к соотношению

$$E(R) = \hbar \, c/2R(1 - l_{пл}^2 / R^2) \quad (40)$$

Построив, согласно (40), график функции $E(R)$ легко убедиться, что размер флуктуаций нулевых гравитационных колебаний нашего осциллятора, при котором полностью искажается евклидова геометрия, равен планковской длине 10^{-33} см.

5. Гравитационное поле вдали от тел.

Если рассматривать стационарное гравитационное поле на больших расстояниях R от

создающего его тела [9], то в первом приближении поправки к компонентам метрического тензора g_{00} будут иметь вид

$$g_{ik} = g^{(0)}_{ik} + h_{ik}$$

где h_{ik} - малые поправки, определяющие гравитационное поле.

Первые члены разложения при больших R будут иметь вид

$$h^{(1)}_{00} = -R_g/R; h^{(1)}_{ab} = -R_g/R n_a n_b; h^{(1)}_{0a} = 0,$$

Члены второго порядка малости в тех же декартовых координатах будут иметь вид

$$h^{(2)}_{00} = 0; h^{(2)}_{ab} = -(R_g/R)^2 n_a n_b$$

$$h^{(2)}_{0a} = 2k/c^3 M_{ab} \partial / \partial x^b 1/R = -2k/c^3 M_{ab} n_b / R^2$$

В общем случае, когда поле вблизи от тела может не быть слабым, M_{ab} есть момент импульса тела вместе с гравитационным полем. Выписанные выше формулы решают вопрос о поле вдали от тел с точностью до членов порядка $1/R^2$. Ковариантные компоненты метрического тензора имеют вид:

$$g_{ik} = g^{(0)}_{ik} + h^{(1)}_{ik} + h^{(2)}_{ik}$$

Контравариантные компоненты с той же точностью равны

$$g^{ik} = g^{(0)ik} - h^{(1)ik} - h^{(2)ik} + h^{(1)i}{}_l h^{(1)lk}$$

Заменив R_g/R на величину l^2_{nl}/R^2 , а также вместо M_{ab} подставив \hbar/φ , где φ - угловая координата микрообъекта, мы придем к соотношениям (25) - (27), т.е. к планковским масштабам.

Итак, из всего вышеизложенного мы видим, что уже в классической книге по общей теории относительности [9] содержится достаточно информации, чтобы получить качественные выводы о поведении материи на планковском уровне, а также получить представление о будущей квантовой теории гравитации. Для этого нам оказалось достаточным выполнить два условия: 1. Предположить, что канонические уравнения классической общей теории относительности сохранят свой вид и на планковском уровне; 2. Везде, где это необходимо, заменить безразмерное отношение R_g/R отношением l^2_{nl}/R^2 .

6. К аналогичным выводам мы приходим и из анализа размерностей.

Действительно, гравитационное поле совершает нулевые колебания. Оценим порядок длины волны нулевых гравитационных колебаний, при которой геометрия становится не похожей на евклидову. Степень отклонения ξ геометрии от евклидовой в гравитационном поле определяется отношением гравитационного потенциала Φ и квадрата скорости света c^2 :

$$\xi = \Phi / c^2$$

Когда $\xi \ll 1$, геометрия близка к евклидовой; при $\xi = 1$ всякое сходство исчезает. Энергия колебания масштаба l равна

$$E = \hbar\nu = \hbar c/l \dots (c/l - \text{порядок частоты колебаний})$$

Гравитационный потенциал Φ , создаваемый массой m , на такой длине есть

$$\Phi = km / l$$

где k - постоянная всемирного тяготения.

Вместо m следует подставить массу, которой соответствует энергия E ($m = E/c^2$).
Получаем

$$\Phi = kE / lc^2 = k \hbar / l^2 c$$

Разделив это выражение на c^2 , получим величину ξ .

$$\xi = \Phi/c^2 = kE / lc^5 = k \hbar / l^2 c^3 = l_{nl}^2 / l^2$$

Сравните с найденным выше соотношением $R_g / R = l_{nl}^2 / R^2$.

Приравняв $\xi = 1$, найдем ту длину, на которой полностью искажается евклидова геометрия:

$$l_{nl} = (k \hbar / c^3)^{1/2}$$

Она равна планковской длине. Здесь евклидова геометрия искажается полностью. Однако равенство

$$\xi = \Phi / c^2 = 1$$

связано с горизонтом событий, так как именно на горизонте событий это равенство имеет место.

В самом деле, равенство $\Phi / c^2 = 1$, приводит к соотношению

$$\Phi = km / l = c^2$$

Отсюда следует

$$l = km / c^2$$

что совпадает, с точностью до множителя 2, с гравитационным радиусом R_g .

Это подтверждает наш вывод о том, что на планковском уровне материя существует в чернотырном состоянии и планковский вакуум состоит из виртуальных планковских черных дыр [17].

Известно, что содержащейся в классических соотношениях информации недостаточно для построения аппарата квантовой механики. Необходима дополнительная информация о свойствах коммутирования рассматриваемых операторов. Иначе говоря, классические соотношения должны быть дополнены перестановочными соотношениями. Именно в перестановочных соотношениях заключена та специфическая информация, без которой немислим аппарат квантовой механики, в том числе и квантовой теории гравитации. В этой связи подчеркнем, что в правую часть найденных нами выше перестановочных соотношений входит специфическая квантово-гравитационная постоянная - квадрат планковской длины l_{nl}^2 . Переход от квантовой теории гравитации к классической гравитации требует положить $l_{nl}^2 = 0$. В этом случае все величины, входящие в перестановочное соотношение, начинают коммутировать и в результате квантово-гравитационное выражение превращается в подлинное уравнение классической теории гравитации, в данном случае в уравнение (10). Присутствие в правой части указанного равенства хотя и малой, но все же отличной от нуля постоянной l_{nl}^2 , обуславливает все своеобразие квантово-гравитационных представлений.

В аппарате квантовой теории гравитации на месте величин, характеризующих в обычной теории гравитации (общей теории относительности) состояние физической системы, должны выступать символические операторы, подчиненные некоммутативному правилу

умножения, найденному выше (16), содержащему квадрат планковской длины $l_{пл}^2$. Это позволит найти спектральное распределение этих величин. В соответствии с принципом дополнительности Бора, канонические уравнения классической общей теории относительности сохранят свой вид, но физические переменные должны замениться символическими операторами, подчиняющимися правилам некоммутативной алгебры.

Из (10) также следует, что наряду с соотношениями $E = \hbar \omega$ и $P = \hbar k$ можно записать соотношение

$$R_i = 2 l_{пл}^2 k_i$$

где k_i - волновой 4 - вектор. Родство этого соотношения и уравнения (10) очевидно. Достаточно подставить в (10) вместо P_i величину $\hbar k_i$.

По аналогии с квантом энергии-импульса материи $P_i = \hbar k_i$, величину $R_i = 2 l_{пл}^2 k_i$ мы должны назвать (с точностью до числового множителя) "квантом энергии-импульса гравитационного поля". Такие кванты мы должны, видимо, отождествить с гравитонами.

Из выражения $R_i = 2 l_{пл}^2 k_i$ мы видим, что квантуется не пространство-время, а радиус кривизны пространства-времени R_i (или кривизна пространства-времени $1/R_i$) или, с точностью до числового множителя, энергия-импульс гравитационного поля. Поэтому величины $R_i = 2 l_{пл}^2 k_i$ мы можем назвать также квантами кривизны пространства-времени.

На планковском уровне (см. [3], [5]) квантовая теория гравитации, скорее всего, является теорией планковских черных дыр, но не теорией планковских струн, как утверждается в [4].

Как подчеркивалось выше, интегрирование должно проводиться по достаточно удаленной гиперповерхности, где пространство-время является асимптотически плоским. К такому случаю как раз и относится интегрирование по гиперповерхности V^i , охватывающей планковскую область пространства-времени, где кривизна пространства-времени становится несущественной уже в масштабе 10^{-32} см (см.[5]). В [5] показано, что 4-пространство-время становится асимптотически плоским практически на горизонте событий планковской черной дыры. Действительно, выше установлено, что в шварцшильдовской метрике в планковских масштабах длин метрический коэффициент g_{00} имеет вид

$$g_{00} = 1 - l_{пл}^2 / R^2 \quad (41)$$

Из (41) видно, что на горизонте событий ($g_{00} = 0$) $R = l_{пл} = 10^{-33}$ см. Однако уже при $R = 10^{-32}$ см метрический коэффициент g_{00} равен

$$g_{00} = 1 - 0,01 = 0,99$$

то есть уже на этом расстоянии пространство-время является практически плоским (g_{00} примерно равен единице). При $R = 10^{-31}$ см метрический коэффициент g_{00} еще на порядок ближе к единице и равен

$$g_{00} = 1 - 0,001 = 0,999 \text{ и т.д.}$$

Поэтому мы имеем полное право рассматривать линеаризованную теорию гравитационного поля Эйнштейна с квантовомеханической точки зрения вплоть до планковских масштабов длин. И только на самом горизонте событий планковской черной дыры или под горизонтом событий такой подход становится неприемлемым. С точки зрения внешнего наблюдателя на планковском уровне в пределах длины 10^{-33} см

положение горизонта событий является неопределенным. На этом уровне метрика пространства-времени, то есть ее геометрия, флуктуирует (мерцает).

"Квантовые флуктуации геометрии пространства на малых расстояниях столь велики, что флуктуирует даже топология, образуя "горловины" и захватывая силовые линии. Эти флуктуации надо представлять себе заполняющими все пространство ("пенообразная структура геометрии") и характеризуются по порядку величины планковской длиной (10^{-33} см). Таким образом заставляет обратить на себя внимание третий тип гравитационного коллапса - коллапс, который непрерывно и всюду совершается, но вместе с тем совершается процесс, обратный коллапсу...Коллапс при планковском масштабе длин происходит всюду и непрерывно в виде квантовой флуктуации геометрии и, по видимому, топологии пространства. В этом смысле коллапс постоянно протекает, но вместе с тем постоянно идет обратный процесс...Пожалуй, самый центральный пункт состоит в следующем: пустое пространство вовсе не является пустым - оно представляет собой вместилище самых бурных физических процессов." [10.т.3,с.465-471]

О квантовании сильного гравитационного поля

Если внутреннее поле тяготения источника слабо, то линеаризованная теория поля справедлива во всем пространстве. Но что будет, если поле тяготения сильное? Справедлива ли в этом случае операция интегрирования уравнения Эйнштейна (1)? Какого рода геометрический объект представляет собой 4-импульс P_i или величина R_i ? Он определяется с помощью измерений, выполненных в относительной удаленности от источника (например, черной дыры), где с увеличением расстояния пространство-время становится все более плоским (асимптотически плоским). Поэтому величины P_i и R_i можно рассматривать как i -компоненты 4-импульсов материи и гравитационного поля в "асимптотически плоском пространстве-времени", окружающем источник в асимптотической лоренцевой системе отсчета, где справедливо линеаризованное уравнение Эйнштейна.

Таким образом, "в окрестности области с любой, как угодно сложной динамикой, если только с некоторой точностью геометрия асимптотически плоская, имеет смысл с той же точностью говорить о полном 4-векторе энергии-импульса динамической области \mathbf{P} и ее полном собственном моменте импульса \mathbf{S} . Параллельный перенос каждого из этих векторов по любой замкнутой кривой в плоской области оставляет их неизменными. Более того, он не зависит от того, насколько сильны отклонения от плоского пространства-времени в динамической области (черные дыры, коллапсирующие звезды, интенсивные гравитационные волны и т.д.); вдали кривизна будет слабой и 4-импульс и момент импульса будут обнаружены по их отпечаткам на геометрии пространства-времени." [10, т.2, с. 95]

Интегрирование же уравнений сильного (нелинейного) гравитационного поля Эйнштейна (1) вблизи от источника в общей теории относительности (не линеаризованных) не определено по той простой причине, что надо просуммировать вклады от компонентов G_{ik} и T_{ik} . Но последние зависят от выбора базиса (системы отсчета) на многообразии. Кривизна здесь играет решающую роль, т.к. на многообразии с ненулевой кривизной (т.е. вблизи от источника) невозможно ввести единую ("выделенную") систему координат, в отличие от плоского пространства.

Поэтому, чтобы просуммировать интегральные суммы по какой-то области, необходимо найти определенное соответствие между значениями G_{ik} и T_{ik} в точках этой области, принадлежащим вообще говоря различным расслоениям. Единственная возможность

сделать это - это совершать параллельный перенос G_{ik} и T_{ik} из одной точки в другую, пока не просуммируется вся интегральная сумма.

Но процедура параллельного переноса единственна только в плоском пространстве, тогда как на многообразии ненулевой кривизны она будет зависеть от пути переноса.

Эта неопределенность при интегрировании приводит к тому, что пока не существует квантовой теории для сильного (нелинейного) гравитационного поля вблизи от источника и выписанное выше уравнение (12) для слабого (линейного) гравитационного поля оказывается основным и единственным уравнением квантовой теории гравитации.

Однако, как можно "спуститься" от общей теории относительности к линеаризованной теории путем линеаризации вблизи плоского пространства-времени (см. выше), так можно и подняться от линеаризованной теории к общей теории относительности путем своеобразного "бутстрапа", полагая условия совместимости линеаризованных уравнений поля и уравнений движения, или, эквивалентно, требуя, чтобы 1) линеаризованное гравитационное поле h_{ik} давало тензор энергии-импульса, 2) этот тензор энергии-импульса служил бы источником для поправок $h^{(1)}_{ik}$ к гравитационному полю, 3) поправки $h^{(1)}_{ik}$ давали бы тензор энергии-импульса, 4) тензор энергии-импульса служил бы источником для поправок $h^{(2)}_{ik}$ к поправкам $h^{(1)}_{ik}$, 5) эти поправки снова давали бы тензор энергии-импульса и т.д.

Именно таким образом можно построить квантовую теорию гравитации для сильного гравитационного поля вблизи от источника, начиная от квантования слабого гравитационного поля в асимптотически плоской области пространства-времени (см. выше) и последовательно поднимаясь по ступеням указанным образом к сильному гравитационному полю.

Однако, как представляется автору, соотношение неопределенностей (17) или (17')

$$\Delta R_i \Delta x^i \geq l_{nl}^2 \quad (17)$$

справедливо и в области сильного гравитационного поля. Действительно, выражение для гравитационного радиуса R_g в сильном гравитационном поле имеет следующий вид

$$R_g = (2k/c^2) M \text{ или } R_g = (2k/c^3) Mc$$

Умножая это выражение справа и слева на 4-скорость U_i , получим

$$R_g U_i = (2k/c^3) Mc U_i$$

или (сравните с (10))

$$R_i = (2k/c^3) P_i$$

где M - полная масса создающего поля тела и, соответственно, P_i - 4-импульс материи и гравитационного поля, вместе взятых.

Отсюда оператор величины R_i имеет вид

$$\underline{R}_i = -2i(k\hbar/c^3) (\partial / \partial x^i)$$

и соответствующее коммутационное соотношение между координатой частицы и величиной R_i , связанной с ее гравитационным радиусом R_g имеет вид

$$(\underline{R}_i x^i - x^i \underline{R}_i) \psi(x^i) \equiv -2i l_{nl}^2 \partial / \partial x^i [x^i \psi(x^i)] - x^i (-2i l_{nl}^2) \partial / \partial x^i [\psi(x^i)] = -2i l_{nl}^2 \psi(x^i)$$

откуда получаем соотношения неопределенностей

$$\Delta R_i \Delta x^i \geq l_{nl}^2$$

или

$$\Delta R_g \Delta S \geq l_{nl}^2$$

Из полученных соотношений неопределенностей следует, что планковский вакуум состоит из виртуальных планковских черных дыр.

Может показаться, что, как указывалось выше, из-за неопределенности при интегрировании 4-импульс материи в сильном гравитационном поле определить нельзя. Однако 4-импульс материи и гравитационного поля P_i в общей теории относительности имеют вполне определенный смысл и он оказывается не зависящим от выбора базиса (системы отсчета) на многообразии с ненулевой кривизной как раз в такой степени, как это необходимо на основании физических соображений.

Действительно, в общей теории относительности имеет место закон сохранения величин [9]

$$P_i = 1/c \int (-g)(T_{ik} + t_{ik}) dV^* \quad (42)$$

где T_{ik} - тензор энергии-импульса материи, а t_{ik} - псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля.

В связи с тем, что t_{ik} является псевдотензором, эти величины можно обратить в нуль в любой точке пространства-времени и потому не имеет смысла говорить об определенной локализации энергии гравитационного поля в пространстве. Величины же P_i (объединяющие материю и гравитационное поле) имеют вполне определенный смысл.

Здесь интегрирование может производиться по любой бесконечной гиперповерхности, включающей в себя все трехмерное пространство. Из-за симметричности индексов i и k у замкнутой системы гравитирующих тел также сохраняется полный 4-момент импульса M_{ik} и, кроме того, по-прежнему может быть дано определение центра инерции, совершающего равномерное движение [9].

Поэтому, как представляется автору, с учетом (42), уравнение (10)

$$R_i = (2k/c^3) P_i \quad (10)$$

и, соответственно, уравнение (12)

$$-i \hbar (\partial \psi / \partial x^i) - c^3/2 k (R_i \psi) = 0 \quad (12)$$

справедливо и вдали от сильного источника гравитационного поля (черной дыры) и в малом объеме пространства-времени.

Уравнение (12) можно переписать следующим образом

$$\{-2i l_{nl}^2 (\partial / \partial x^i) - (R_i)\} \psi = 0$$

Поэтому найденное нами выше соотношение неопределенностей

$$\Delta R_i \Delta x^i \geq l_{nl}^2$$

между гравитационным импульсом частицы $R_i = R_g U_i$ и ее координатой x^i для слабого гравитационного поля остается справедливым и для сильного гравитационного поля.

Исследования физиков показали, что черные дыры и элементарные частицы имеют много общих черт. Все черные дыры, как и элементарные частицы, за исключением массы, заряда и спина, выглядят одинаково. И те и другие выглядят как мельчайшие сгустки

материи, полностью характеризующиеся массами, зарядами и спинами.

Учет эффектов квантовой гравитации (смотрите, например, мою статью о геонах [5]) показывает, что черные дыры с массой меньше планковской, не образуются. Планковские черные дыры имеют чрезвычайно малое сечение взаимодействия ($\sim 10^{-66}$ см²). Это приводит к тому, что звезды и планеты практически полностью для них прозрачны – длина свободного пробега планковской черной дыры в веществе ядерной плотности сравнима с радиусом видимой части Вселенной. Поэтому их очень трудно обнаружить.

Планковские черные дыры должны играть важную роль в физике элементарных частиц. При вычислении собственной энергии частицы обычно учитывают вклад промежуточных состояний с произвольно большой энергией, что приводит к появлению расходимостей. Учет гравитационных взаимодействий соответствующих виртуальных частиц и появление виртуальных черных дыр в промежуточном состоянии должен привести к устранению этих расходимостей.

Виртуальные планковские черные дыры должны, согласно соотношению неопределенностей $\Delta R_g \Delta S \geq l_{pl}^2$, возникать и в вакууме в результате квантовых флуктуаций. Квантовые флуктуации гравитационного поля (мерцание геометрии пространства-времени) тем больше, чем меньше масштаб длины. В планковском масштабе ($\sim 10^{-33}$ см) флуктуации метрики порядка единицы. Пространство-время в планковских масштабах напоминает "мыльную пену". Взаимодействие элементарных частиц с пространственно-временной "пеной" может приводить к несохранению бозонного и лептонного зарядов. Ожидаемое при этом время жизни протона составляет $\sim 10^{50}$ лет.

В планковских масштабах длин пустое пространство вовсе не является пустым - оно представляет собой вместилище самых бурных физических процессов. Причем эти процессы есть не что иное, как гравитационный коллапс, который непрерывно и всюду совершается, но вместе с тем совершается процесс, обратный коллапсу. Коллапс при планковском масштабе длин происходит всюду и непрерывно в виде квантовой флуктуации геометрии и, по-видимому, топологии пространства. В этом смысле коллапс постоянно протекает, но вместе с тем постоянно идет обратный процесс. Но в статье [12] я ранее показал, что образование планковских черных дыр энергетически наиболее выгодно в 3-х мерном пространстве, что скорее всего и обусловило трехмерность наблюдаемого пространства. С этой точки зрения сам факт трехмерности пространства свидетельствует о том, что в планковских масштабах длин пространство "кипит", причем "пузырьками" этой кипящей пространственно-временной "пены" являются спонтанно рождающиеся и тут же исчезающие ("испаряющиеся") виртуальные планковские черные дыры с плотностью 10^{94} г/см³. В рамках описанной картины трехмерность пространства естественным образом объясняется существованием вакуума, состоящего из виртуальных планковских черных дыр.

Может возникнуть вопрос, как теперь можно интерпретировать на планковском уровне операцию дифференцирования? Ведь эта операция, предполагает, что понятия пространства и длины не перестают существовать. На этот вопрос отвечает уравнение

$$dS^2 = (1 - 2l_{pl}^2 / R^2) c^2 dt^2 - dR^2 / (1 - 2l_{pl}^2 / R^2) - R^2 (d\Omega^2 + \sin^2 \Omega d\phi^2) \quad (43)$$

Из него следует, что когда мы доходим до планковских масштабов, на планковском уровне образуется пространственно-временной разрыв, дыра в пространстве, то есть операция дифференцирования теряет смысл (в уравнении (43) появляется деление на ноль). Но, казалось бы, сингулярность в метрике Шварцшильда нефизическая. Она устраняется выбором соответствующей (падающей) системы отсчета. Истинная, физическая сингулярность находится только в центре черной дыры. Действительно, если черная дыра большая, то от координатной сингулярности можно избавиться, перейдя в

падающую систему отсчета. Падающий наблюдатель даже не заметит, как и когда он пересечет горизонт событий. Но для планковской черной дыры ситуация совсем другая. Чтобы пересечь планковский горизонт событий, падающая система отсчета вместе с наблюдателем должна уменьшиться до планковских размеров. Как только это произойдет, падающая система отсчета сама превратится в планковскую черную дыру. Поэтому истинную сингулярность, находящуюся под горизонтом событий планковской черной дыры, некому и нечем верифицировать (эмпирически подтвердить). А раз так, то мы не имеем права о ней говорить, она ненаблюдаема и для удаленного наблюдателя и для падающего. Таким образом, метрическая нефизическая сингулярность на планковском уровне одновременно оказывается истинной физической сингулярностью. Другого нам просто не дано.

Существенной поддержкой для подтверждения вышеизложенных в статье выводов являются недавно обнаруженные автором в журнале "Успехи физических наук" материалы 2-го семинара международной конференции по квантовой теории гравитации, проходившего в Москве 13-15 октября 1981 года.

Цитирую: *"Важной проблемой, обсуждавшейся в докладе, была гипотеза о существовании стабильных элементарных черных дыр планковской массы 10^{-5} г. Этот вопрос стал острым после доказательства С. Хокингом утверждения о том, что при выполнении СРТ-теоремы из состояния, первоначально не содержащем планковских черных дыр, не может возникнуть конечное состояние, содержащее устойчивые планковские черные дыры. В докладе было обращено внимание на то, что эта теорема не запрещает возможности существования стабильных планковских черных дыр в мире, начальные условия в котором таковы, что планковские черные дыры присутствуют (или образуются, как геоны - А.К.) изначально. Это замечание особенно важно, поскольку остается открытой заманчивая возможность построения сценария Вселенной, основную роль в котором играет составляющая стабильных планковских черных дыр (например, темная материя - А.К.). Если стабильные планковские черные дыры существуют, то они играют роль элементарных частиц предельно большой массы, определяя масштаб и верхнюю границу спектра масс элементарных частиц. Однако даже если элементарные планковские черные дыры нестабильны, они тем не менее должны участвовать в промежуточных состояниях в квантовых процессах в качестве виртуальных (короткоживущих) образований.*

Вопрос о виртуальных черных дырах тесным образом связан с вопросом о структуре вакуума в квантовой гравитации. Согласно современным представлениям, физический вакуум, т. е. состояние, в котором отсутствуют реальные частицы, представляет собой сложное образование, порожденное квантовыми флуктуациями всех существующих в природе физических полей. Из-за того, что гравитационная постоянная является размерной величиной, квантовая гравитация отличается от других взаимодействий тем, что амплитуда квантовых флуктуаций оказывается тем больше, чем меньшую область она занимает. Как отмечал еще американский теоретик Дж. Уиллер, это приводит, в частности, к тому, что в масштабах 10^{-33} см флуктуации метрики сравнимы с единицей, и возможны виртуальные изменения топологии и возникновение виртуальных черных дыр. Иными словами, пространство-время в малом напоминает скорее мыльную пену, чем гладь воды. Теорию пенной структуры в последнее время интенсивно развивает один из ведущих английских теоретиков, профессор Кембриджского университета С. Хокинг. В его докладе, представленном на семинаре, обсуждался вопрос, каким образом подобная пенная структура может влиять на физические процессы и, в частности, на распространение физических частиц. Принципиально новым при этом является потеря квантовой когерентности в

результате взаимодействия частицы с виртуальной черной дырой. Как следствие, любая квантовая система должна описываться матрицей плотности, а не вектором состояния. Соответствующим образом модифицируется система аксиом квантовой теории поля и математический аппарат для описания таких процессов, как распады и рассеяние элементарных частиц. В результате появляется возможность нарушения многих законов сохранения, в том числе законов сохранения барионного и лептонного зарядов. Характерное время жизни протона относительно таких квантовогравитационных процессов оказывается равным 10^{50} лет, что почти на 20 порядков больше характерного времени, обсуждаемого в настоящее время в рамках теории "Великого объединения". Несмотря на то, что время жизни частиц в результате таких распадов чрезвычайно велико и неизмеримо в настоящее время, сама принципиальная возможность несохранения барионного и лептонного чисел в гравитационных взаимодействиях представляет несомненный интерес и может оказаться крайне существенной для космологии." [20]

Данная конференция проходила довольно давно, почти 30 лет тому назад. Хотелось бы подчеркнуть, что автор статьи самостоятельно, используя свою методику (с помощью интегрирования линеаризованных гравитационных уравнений Эйнштейна), пришел к изложенным в статье выводам и, в частности, к выводу о существовании планковского вакуума, состоящего из виртуальных планковских черных дыр. В то же время материалы указанной конференции не потеряли своей актуальности и сегодня.

Экспериментальное подтверждение теории

Две группы астрономов - одна из Алабамского университета в г. Хантсвилл, другая - из астрофизической обсерватории Арчетри (Италия) - исследовали изображения удаленных звезд и галактик. Изображения объектов оказались совершенно резкими. По мнению ученых, это противоречит гипотезе о квантовой природе пространства-времени в микромасштабах, поскольку в этом случае изображения удаленных объектов были бы нечеткими, "смазанными". Поставлены под сомнение две основополагающие теории современной физики - квантовая теория, описывающая поведение материи на микроуровне, и общая теория относительности Эйнштейна, которая описывает структуру пространства, времени и гравитации в макромасштабах.

Результаты работы поставили под сомнение существование двух физических величин - так называемой планковской длины и планковского времени. Согласно теории, это своеобразные кванты - наименьшие измеримые величины длины и времени (планковская длина равна расстоянию, которое пройдет свет в вакууме за промежуток времени, равный планковскому времени – 5×10^{-44} секунды).

"Теоретики весьма обеспокоены этими данными, - заявил Ричард Лью из Алабамского университета. - Возможно, мы что-то недопонимаем в физике". "Ничего подобного предсказанным ранее эффектам квантования времени и пространства мы не обнаружили", - соглашается с г-ном Лью астроном Роберто Рагаццони из обсерватории Арчетри. Он и его коллеги провели те же наблюдения, что и группа Лью, но использовали для этого другую методику. "Данные наблюдений весьма интересны и, возможно, будут иметь исключительно важные последствия, - заявил теоретик Джон из университета Ноттингэма (Великобритания). - Любая теория квантовой гравитации должна будет в дальнейшем их учитывать". Тем не менее, он сказал, что наши представления о квантовой гравитации еще не позволяют с уверенностью предсказывать эффекты.

Возможно, нечетких изображений удаленных объектов и вовсе не должно быть. Рагаццони и Лью ранее предположили, что измерить планковское время можно путем анализа изображений удаленных объектов во Вселенной. Поток электромагнитного

излучения (фотонов) от такого точечного объекта, прежде чем добраться до наблюдателя, должен многократно "преодолеть" масштаб планковского времени, в результате чего его скорость будет слегка меняться, так что изображение объекта окажется искаженным. И чем дальше расположен объект, тем больше таких искажений, обусловленных "ячеистой" природой пространства и времени, накопится к тому моменту, когда его свет достигнет земного наблюдателя. Этот эффект и приведет к "размазыванию" изображения объекта.

Группа Рагацони оценила степень ожидаемого искажения изображений удаленных объектов в зависимости от расстоянии до них. Но при сравнении изображений взорвавшейся звезды и галактики, расположенных от нас на расстояниях 42 млн. и 5 млрд. световых лет соответственно, выяснилось, что "размазывания" их изображений не удастся обнаружить вообще.

О полной дискредитации теории квантования пространства и времени говорить еще, конечно, рано. У теоретиков в запасе есть, по меньшей мере, два варианта объяснения странного факта. Первый вариант исходит из того, что на микроуровне - в планковском масштабе - пространство и время варьируются одновременно друг с другом, так что скорость распространения фотонов при этом не меняется. Второе объяснение предполагает, что неоднородности скорости определяются не планковской длиной, а ее квадратом (порядка 10^{-66} метра), так что эти неоднородности становятся неизмеримо малыми[15].

Действительно, из общей теории относительности следует, что если мы обозначим через c скорость света в начале координат, то скорость света c' в некотором месте с гравитационным потенциалом Φ будет равна

$$c' = c(1 + 2\Phi/c^2) = c(1 - R_g/R)$$

Но величина R_g/R в планковском масштабе, как мы выяснили выше, имеет вид $l_{пл}^2/R^2$, то есть неоднородность скорости света c' и в самом деле определяются квадратом планковской длины $l_{пл}^2$ и имеет вид

$$c' = c(1 - l_{пл}^2/R^2)$$

Искажение величины скорости света c' происходит вследствие прохождения луча света через планковский вакуум, заполненный виртуальными планковскими черными дырами, и оно, естественно, зависит от плотности планковского вакуума, т.е. от того, сколько виртуальных планковских черных дыр приходится на единицу объема.

Начиная с 30-х годов, со времени появления гипотезы Д.Д. Иваненко и В.А. Амбарцумяна [18] о существовании своеобразного кванта длины, надуманная идея дискретного характера пространства-времени в микромире утвердилась в прошедшие десятилетия как весьма вероятная.

Однако из нашей статьи не следует, что пространство-время на планковском уровне имеет "ячеистую" природу и потому неоднородно. Пространство-время ограничено снизу планковской длиной, на этом уровне его невозможно верифицировать (определить опытным путем), так как любые инструменты для проведения такой верификации в планковских масштабах коллапсируют и становятся планковскими черными дырами. Но на самом деле квантуется, как было показано выше, не пространство-время, а кривизна пространства-времени. Это естественно, так как энергия-импульс связан не с пространством-временем, а с кривизной пространства-времени (смотри уравнение (10)) и потому квантование энергии-импульса влечет за собой и квантование кривизны пространства-времени.

С другой стороны, соотношение неопределенностей (17) свидетельствует, что на

планковском уровне существует вакуум, состоящий из виртуальных планковских черных дыр. Именно он создает отрицательное давление и является, по нашему мнению, источником загадочной темной энергии. Плотность энергии вакуума не изменяется при расширении Вселенной, а это и означает отрицательное давление вакуума. Астрономические наблюдения свидетельствуют о том, что сегодня (и в недалеком прошлом) Вселенная расширяется с ускорением: темп расширения растет со временем. В этом смысле можно говорить об антигравитации: обычное гравитационное притяжение замедляло бы разбегание галактик, а в нашей Вселенной, получается, всё наоборот.

Литература

1. Бронштейн М.П., ЖЭТФ, 6, (1936)
2. Климец А.П., *Физика и философия. Поиск истины*, Брест, "Форт", 1997
3. Klimets A.P. FIZIKA B (Zagreb) **9** (2000) 1, 23 - 42 или http://fizika.hfd.hr/fizika_b/bv00/b9p023.htm
4. Маршаков А.В. УФН, **172** 977 (2002) или <http://ufn.ioc.ac.ru/Index02.html>
5. Климец А.П. *Геоны, черные дыры и фундаментальная планковская длина* или <http://apklimets.narod.ru/geon.htm>, 2000;
6. S. Carlip, *Quantum Gravity: a Progress*, gr-qc/ 0108040, (2001)
7. C. Rovelli, Living Rev. Rel. 1-1 (1998).
8. Hawking S.W., Commun. Math. Phys., 43, 199 (1975)
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Теория поля*, Москва, Физматлит, 2003
10. Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер, *Гравитация*, в 3-х томах, Москва, Мир, 1977
11. Fierz M., Pauli W., Proc.Roy. Soc., London, A173,241 (1939)
12. Климец А.П. "Почему пространство трехмерно", <http://apklimets.narod.ru/trexmerie.htm>
13. Б. Карр, С. Гиддингс "Квантовые черные дыры", ж-л "В мире науки", 2005, № 8
14. А. Эйнштейн. *Собрание научных трудов*, т. 1, М., Наука, 1965, с. 436
15. Nature, 11, 2005
16. T.W.B. Kibble, *Quantum Theory of Gravitation*, 1965 или Т. Киббл *Квантовая теория гравитации*, УФН, **96** 497 (1968)
17. А.Б. Мигдал. *Квантовая физика для больших и маленьких*, Москва, Наука, 1989
18. Zeitschrift fur Physik, Bd. 64, 1930, S. 563-567
19. Т. Редже "Гравитационное поле и квантовая механика" в сб. "Альберт Эйнштейн и теория гравитации", Москва, Наука, 1979 г.
20. Фролов В.П. УФН, **138** 151 (1982)
21. Кант, М., Мысль, 1963, т.1
22. Egenfest P. Proc. Amsterdam acad., 1917, vol. 20
23. Горелик Г.Е. Почему пространство трехмерно?, М., Наука, 1992
24. В. Гуревич, Г. Волмен. Теория размерности, с. 31