

# Интерференционные явления: фракталы в ближней зоне, Талбот-ковры и поведение бомовских траекторий на них

В.И. Сбитнев\*

(Получена 7 октября 2009; опубликована 15 октября 2009)

Фрактальные интерференционные паттерны, возникающие в ближней зоне, являются предметом обсуждения в этой статье. Ярким проявлением такого паттерна является Талбот-эффект, наблюдаемый в ближней зоне. Чтобы интерференционный Талбот-ковер проявлял бы признаки фрактального множества, следует выполнить ряд предельных условий, сформулированных Майклом Берри: (а) количество щелей должно стремиться к бесконечности; (б) отношение длины волны  $\lambda$  к ширине межщелевого расстояния  $d$  должно стремиться к нулю; (в) свет распространяется параллельно оси оптической системы. Показано поведение бомовских траекторий на таком фрактально-подобном ковре Талбота. Они обнаруживают зигзагообразные скачки вдоль линий, подчеркивающих фрактальность интерференционного паттерна.

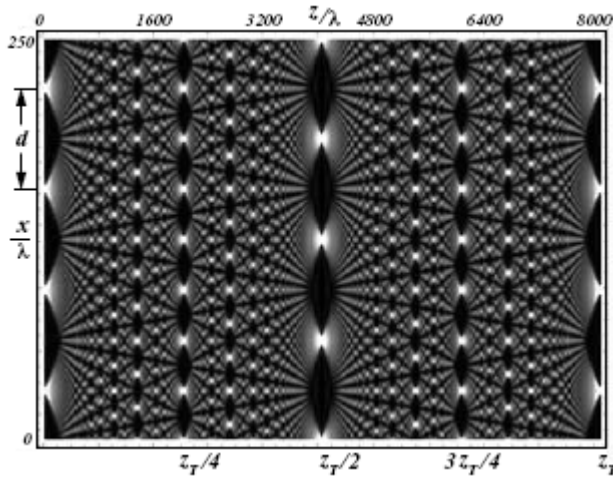
## 1. Введение

Кто из нас не любовался радугой, возникающей, чаще всего, после теплого летнего дождя, когда солнечный свет, проходя сквозь взвешенные в воздухе капельки воды, расслаивался во все цвета от красного до фиолетового. Сэр Исаак Ньютон прояснил механизм расслоения света, поместив на пути луча треугольную призму, преломляющую ход лучей, прежде чем они упадут на экран. Оказалось, что солнечный свет включает в себя самые разные цвета и их смесь дает тот самый белый свет, который видит наш глаз. Достаточно посмотреть на отраженный от блестящего предмета свет, чтобы можно было увидеть в его отблеске все цвета радуги.

Оптические явления значительно богаче выше упомянутого расслоения на разные цвета. Даже если взять световой луч с единственным цветом (далее такой свет называется монохроматическим), можно обнаружить интересные интерференционные явления, если этот луч послать на решетку, имеющую ряд упорядоченных прорезей. Таким интересным и вместе с тем интригующим интерференционным явлением представляется Талбот-ковер, см. Рисунок 1. Впервые этот интерференционный паттерн наблюдал Генри Фокс Талбот в 1836 году [1]. Это совпало со временем великих открытий в физике и технике. Одно из них - открытие возможности фиксировать видео-образ на фотоносителе. Два человека соревновались за первенство данного открытия – англичанин Генри Фокс Талбот (1800–1877) [2] и француз Луи Жак Манде Дагер (1787–1851) [3]. История отдала предпочтение Луи Жак Дагеру. В свою очередь, Генри Фокс Талбот вошел в историю как исследователь, открывший выше упомянутый интерференционный эффект, названный его именем.

---

\* [valery.sbitnev@gmail.com](mailto:valery.sbitnev@gmail.com), Санкт-Петербургский Институт Ядерной Физики им. Б.П.Константинова, РАН



**Рисунок 1**

Оптический эффект монохроматического света, названный ковром Талбота. Монохроматический свет падает слева на экран, включающий четыре щели. Расположенные по бокам зеркала, отражают свет во внутреннюю область. В результате такого отражения ковер Талбота может воспроизводиться периодически с периодом  $z_T$ . Здесь параметр  $d$  - период решетки.

Лорд Рэлей показал, что эффект Талбота представляет собой дифракцию Френеля в ближней зоне. Естественная единица длины этого интерференционного Талбот-паттерна

$$z_T = \frac{2d^2}{\lambda} \quad (1)$$

названа длиной Талбота. Здесь  $d$  – период решетки,  $\lambda$  – длина волны падающего света. На Рисунке 1 показан один период ковра Талбота. Здесь образ оригинала, представляющего засветку щелевого экрана при  $z = 0$ , повторяется с периодом, кратным длине Талбота  $z_T$ . Фантастическая структура ковра указывает на то, что в данном случае имеет место фрактально-подобная организация интерференции в ближней зоне [4].

Эффект Талбота был какое-то время незаслуженно забыт (забавная картинка и ничего более). Интерес к этому эффекту возродился с развитием фотолитографии при производстве интегральных схем, а также процессоров для современных компьютеров. Кроме того, интерес к нему проявляется в теории чисел, как к возможному алгоритму при выполнении арифметических вычислений, основанных на интерференции. В настоящее время работа с кубитами (квантовыми битами) также привлекает пристальное внимание к подобным интерференционным эффектам.

Интерференция является результатом суперпозиции волн, сходящихся в одном месте. Следовательно, подобные паттерны можно наблюдать при эквивалентных условиях в разных средах, будь то колебания электромагнитных волн, колебания волн на воде, или акустические колебания воздушных масс. Но в данном случае нас будут интересовать волны де Бройля, которые проявляются как волны квантовой материи. Известно, что каждой частице с заданным импульсом  $p$  можно поставить в соответствие длину волны де Бройля  $\lambda = h/p$ , здесь  $h$  – постоянная Планка. Следовательно, при рассеянии частиц на  $N$ -щелевой решетке можно ожидать появления подобных Талбот-ковров в ближней зоне. В дальней же зоне будет наблюдаться обычная дифракционная картина, возникающая от рассеяния на такой решетке. Такая картина описывается универсальной функцией

$$I(\zeta) = I_0(\zeta) \frac{\sin^2\left(\frac{N\zeta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\zeta}{2}\right)} \quad (2)$$

Здесь  $\zeta$  есть фазовый сдвиг волн, излучаемых от ближайших щелей в направлении детектора, удаленного от щелевой решетки на «бесконечность». Такой дифракционный паттерн будет иметь ряд главных максимумов в точках  $\zeta = \pm 2k\pi$ ,  $k=0,1,2,\dots,\infty$ . Между соседними главными максимумами располагается  $(N-2)$  малых побочных максимумов.

В данной работе показываются результаты, полученные при моделировании рассеяния частиц на  $N$ -щелевой решетке. Теоретическая модель описана в работах [5,6]. Здесь же опишем дополнительные результаты, которые оказываются напрямую связаны с фрактальными интерференционными паттернами, возникающими в ближней зоне. Таким типичным образцом является Талбот-ковер, показанный на Рисунке 1. Интерес к Талбот-эффекту, как было отмечено выше, обусловлен как успехами микроминиатюризации в компьютерной индустрии, а конкретно с техникой фотолитографии, так и попытками привлечь кубиты к вычислительным операциям. Что касается вычислительных операций с кубитами, здесь особая роль отводится фрактальности интерференционных Талбот-паттернов, возникающей при рассеянии частиц на решетках с большим количеством щелей. Фрактальность волнового поля может обеспечить ту самую много-модовость вычислительных операций за один акт рассеяния.

## 2. Гауссов волновой пакет, рассеиваемый со щелей

Здесь дадим краткий список формул, лежащих в основании интерференционных картин, представленных ниже. Начнем с того, что гауссова волновая функция, излучаемая от одной щели, имеет вид [6]:

$$\Psi(x, z) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\sigma_t^2}\right\} \exp\left\{-i\frac{p_z}{\hbar}z\right\}, \quad (3)$$

где

$$\sigma_t = \sigma \left(1 + i\frac{\hbar}{2m}t\sigma^{-2}\right) \quad (4)$$

является времени зависимым дисперсионным коэффициентом, описывающим рассывание волнового пакета (3) со временем [7,8]. Следует обратить внимание на наличие мнимой единицы в формуле (4). Ее присутствие является причиной возникновения довольно сложных интерференционных эффектов между плоскими волнами, составляющими этот волновой пакет. В начальный момент времени,  $t = 0$ ,  $\sigma_{t=0} = \sigma$  – стандартное отклонение. Здесь мы принимаем  $\sigma = 8 \cdot 10^{-10}$  м. Остальные параметры в этих формулах представляют базисные характеристики волнового пакета [6], а именно:  $m$  – масса частицы (в расчетах принимается масса нейтрона),  $p_z = mv_z$  –  $z$ -ая компонента импульса, а  $v_z$  –  $z$ -ая компонента скорости, и  $\hbar$  – редуцированная постоянная Планка.

Суперпозиция гауссовых волновых пакетов, излучаемых с  $N$  щелей, есть

$$|\Psi(x, z)\rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Psi\left(x - \left(n - \frac{N-1}{2}\right)d, z\right), \quad (5)$$

а наблюдаемой величиной является распределение плотности вероятности

$$\begin{aligned}
 p(x, z) &= \langle \Psi(x, z) | \Psi(x, z) \rangle \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \Psi^\dagger \left( x - \left( n - \frac{N-1}{2} \right) d, z \right) \cdot \Psi \left( x - \left( n - \frac{N-1}{2} \right) d, z \right).
 \end{aligned} \tag{6}$$

В процессе построения Бомовских траекторий, следует предварительно вычислить скорость поперечного сдвига (сдвига, параллельного плоскости щелевой решетки). Эта скорость вычисляется согласно следующей формуле (guidance equation [7,8])

$$v_x = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left( |\Psi(x, z)\rangle^{-1} \frac{\partial}{\partial x} |\Psi(x, z)\rangle \right). \tag{7}$$

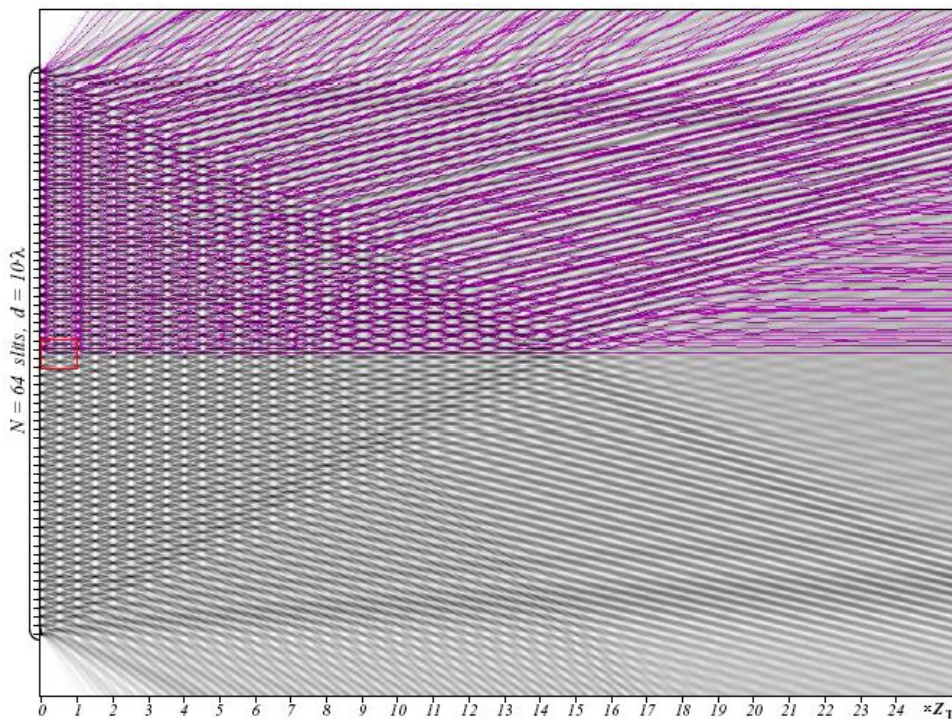
Можно видеть, поперечная скорость частицы в точке  $(x, z)$  пропорциональна мнимой части градиента волнового поля, деленного на амплитуду этого поля в данной точке. Положение частицы вдоль пути от щели в экране до детектора вычисляется по формуле

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t v_x d\tau, \\ z(t) = z_0 + v_z t. \end{cases} \tag{8}$$

Начальные положения частицы  $x_0, z_0$  задаются, например, из загрузочного файла. А затем  $x(t), z(t)$  вычисляются из известных на момент  $t$  скоростей  $v_x$  и  $v_z$ .

### 3. Существование фракталов в ближней зоне

Чтобы наблюдать возникновение фрактально-подобной интерференции в ближней зоне, следует или увеличить количество щелей в экране, или сделать подобие волновода, как это реализовано при наблюдении Талбот-ковра, показанного на Рисунке 1. Здесь будет реализован первый вариант. А именно, давайте взглянем на паттерн излучения от конечной решетки, содержащей 64 щели, смотри Рисунок 2. Теоретически следовало бы брать предел  $N \rightarrow \infty$ . Однако при конечном, но достаточно большом количестве щелей  $N$ , можно ограничиться изучением интерференционного паттерна вблизи самой решетки, в окрестности ее центральной части. На приведенном рисунке, этому соответствует зона, очерченная красным квадратом. Именно в этой зоне в дальнейшем будет изучаться возникновение фрактально-подобных интерференционных паттернов. Очевидно, отклонение от этой зоны в сторону или вперед, по ходу движения волны, приводит к нарушениям изучаемого интерференционного паттерна тем сильнее, чем больше отклонение (как хорошо видно на представленном рисунке). По этой причине приходится брать решетку с большим количеством щелей.

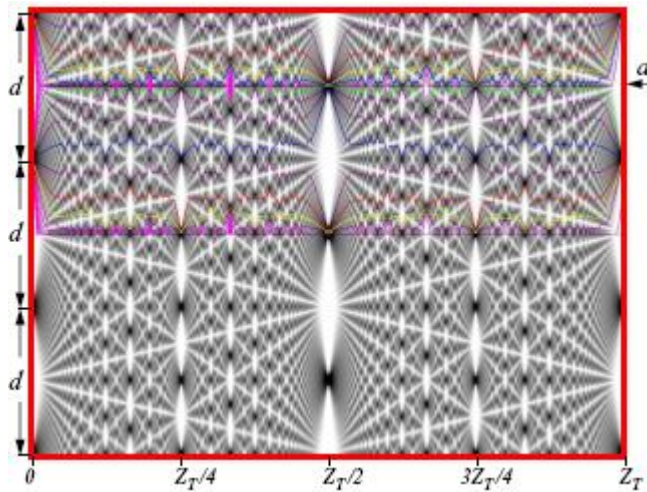


**Рисунок 2**

Интерференция с решетки, состоящей из  $N = 64$  щели. Длина волны  $\lambda = 5$  нм. Серым цветом представлено распределение  $\rho(x, z)$ . Здесь ось по вертикали –  $x$ , ось по горизонтали –  $z$ . Период  $d = 50$  нм. Единицей длины вдоль оси  $z$  принята длина Талбота  $z_T = 1000$  нм. В верхней части рисунка фиолетовым цветом показаны пучки траекторий Бома.

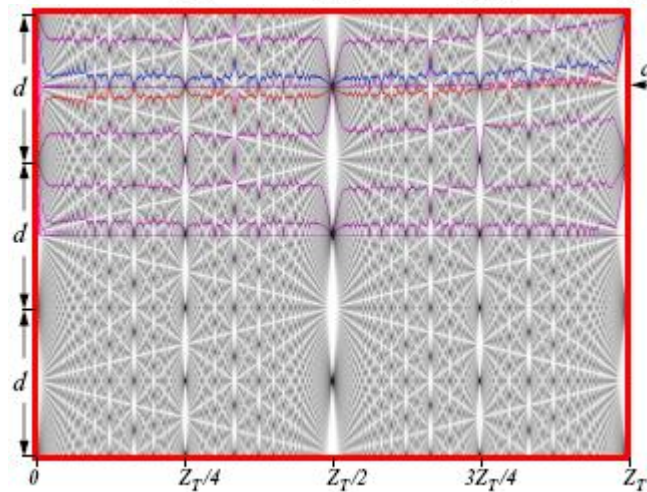
На Рисунке 2 захвачена переходная область от ближней области к дальней. Ясно видно как рассыпается интерференционный паттерн, представленный вблизи щелей правильными прямоугольниками, по мере того, как взгляд скользит вправо от решетки. В дальней зоне возникает обычная дифракция, описываемая формулой (2), с множеством расходящихся лучей, отделенных друг от друга  $(N-2)$  вспомогательными максимумами. При  $N=64$ , эти максимумы уже практически не различимы от фона.

Расходящиеся кривые, прочерченные фиолетовым цветом в верхней части Рисунка 2, изображают траектории Бома. Данные траектории показывают возможные пути, по которым могут следовать частицы от источника к детектору, расположенному в дальней зоне. Траектории являются волнистыми на периферии, а вблизи щелей повторяют фактуру прямоугольных паттернов распределения плотности вероятности  $\rho(x, z)$ . Каждая такая траектория представляет возможный путь частицы, пролетающей через  $N$ -щелевую решетку. Это противоречит ортодоксальной точке зрения, в согласии с которой частица одновременно проходит через все щели, и только на выходе, как ни в чем не бывало, снова превращается в саму себя. Только таким образом, якобы, можно объяснить интерференционный эффект. Но реальнее было бы допустить, что сама  $N$ -щелевая структура вносит искажения в поляризацию вакуума. В этом случае, пролетающая частица обменивается виртуальными квантами с вакуумом, в согласии с тем, как предсказывают Фейнмановские интегралы по траекториям [9]. Все пути, которые не удовлетворяют принципу стационарного действия, интерферируя друг с другом, дают результирующий нуль. И только единственный путь, удовлетворяющий данному принципу, не исчезает. Такой путь называется траекторией Бома.



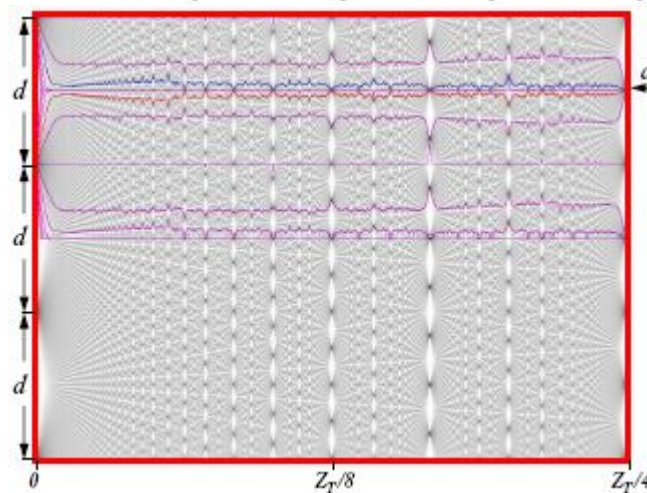
**Рисунок 3**

Талбот-ковер при  $\lambda = 5$  нм. Период дифракционной решетки  $d = 10\lambda = 50$  нм, длина Талбота  $z_T = 1000$  нм. Чтобы подчеркнуть, что траектории не пересекаются, часть из них показана другим цветом – красный, синий, зеленый, желтый.



**Рисунок 4**

Талбот-ковер при  $\lambda = 5$  нм. Период дифракционной решетки  $d = 20\lambda = 100$  нм, длина Талбота  $z_T = 4000$  нм. Чтобы подчеркнуть, что траектории не пересекаются, часть из них показана другим цветом – красный, синий.

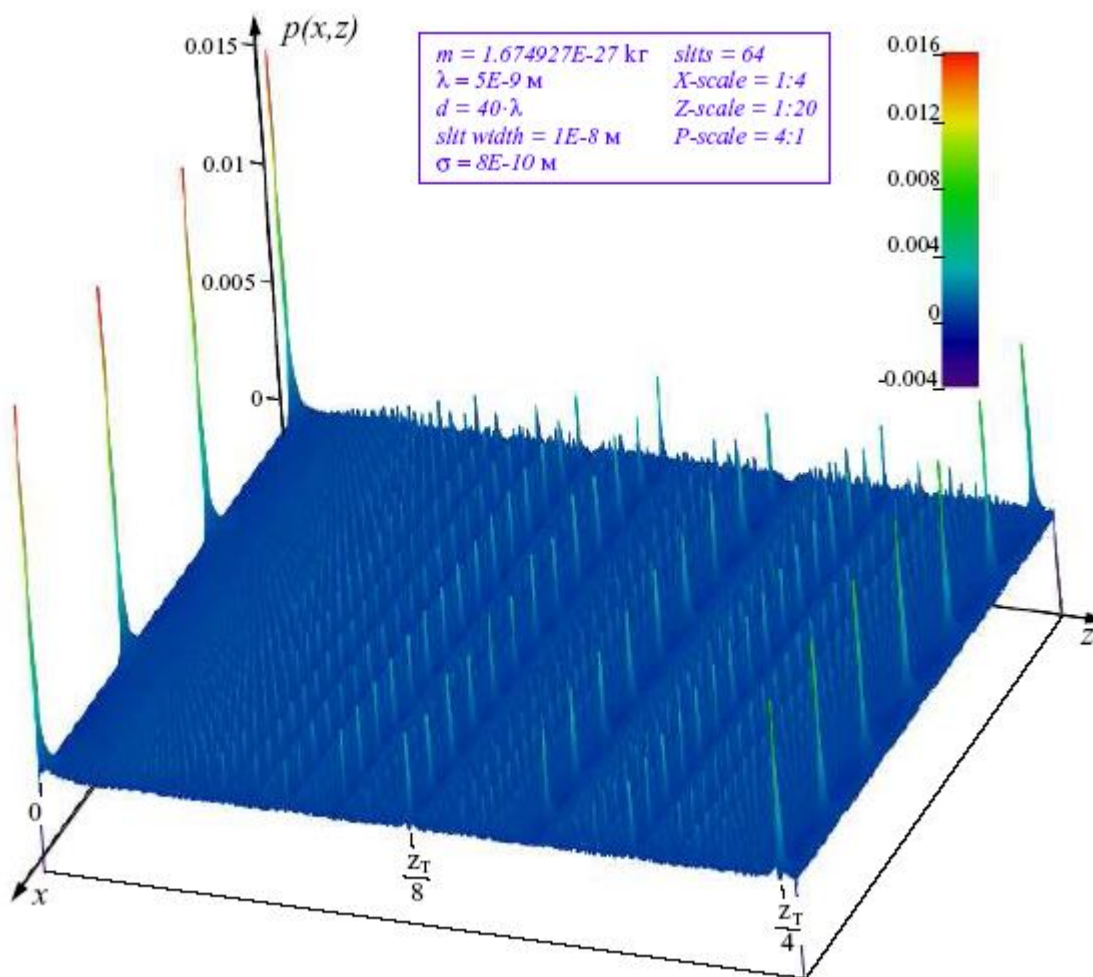


**Рисунок 5**

Талбот-ковер при  $\lambda = 5$  нм. Период дифракционной решетки  $d = 40\lambda = 200$  нм, длина Талбота  $z_T = 16000$  нм. Чтобы подчеркнуть, что траектории не пересекаются, часть из них показана другим цветом – красный, синий.

Рассмотрим интерференционную картину, возникающую в области, очерченной красным квадратом на Рисунке 2 в центре справа. Здесь  $d/\lambda = 10$  и организация волнового поля в пределах квадрата кажется достаточно сложной. На Рисунке 3 показан в увеличенном виде паттерн, захваченный из этого квадрата. Сравнивая данный рисунок с Талбот-ковром, представленным на Рисунке 1, можно заметить, что они эквивалентны. Таким образом мы видим, в области, непосредственно примыкающей к щелевой решетке, возникает ковер Талбота. Давайте теперь увеличим отношение  $d/\lambda$  на величину, кратную двойке. На Рисунке 4 обнаруживается такой же ковер Талбота при отношении  $d/\lambda=20$ . Данный паттерн, как видно, прорисовывает более детально организацию ковра. Давайте еще раз увеличим отношение  $d/\lambda$  на величину, кратную двойке, т.е., сделаем отношение  $d/\lambda=40$ . Теперь ковер Талбота прорисовывается еще более детально. По этой причине, в

частности, на Рисунке 5 показана только первая четверть ковра Талбота. Хорошо видна фрактальная организация ковра в окрестности, прилегающей к щелевой решетке. Отсюда можно заключить, что ковер Талбота проявляет признаки фрактального множества тем лучше, чем больше отношение  $d/\lambda$ . В идеале, это отношение должно стремиться к бесконечности. В этом предельном случае ковер Талбота проявит истинное фрактальное множество [4,10,11]. Заметим, что количество щелей в решетке также должно стремиться к бесконечности. При выполнении этих двух пределов Талбот-ковер проявит истинную фрактальность. Что касается третьего пункта, отмеченного в аннотации, гласящего, что монохроматический пучок частиц распространяется параллельно оптической оси щелевой решетки, этот факт представлен наличием фазового множителя  $\exp\{-ip_z z/\hbar\}$  в волновой функции  $\Psi(x,z)$ , смотри формулу (3).



**Рисунок 6** Плотность вероятности  $p(x,z)$ : период дифракционной решетки  $d = 40\lambda = 200$  нм, длина Талбота  $z_T = 16000$  нм, сравни с Талбот-ковром, показанным на Рисунке 5.

Рисунки 3, 4 и 5 показывают, по мере того как отношение  $d/\lambda$  увеличивается от 10 до 20 и далее до 40, пучности (зачерненные на рисунках узлы) приобретают все более и более локализованный характер. Можно полагать, что в пределе  $d/\lambda \rightarrow \infty$  эти пучности стремятся к  $\delta$ -функциям Дирака. В качестве подтверждения приведем Рисунок 6, который показывает плотность вероятности  $p(x,z)$ . Она соответствует коврику Талбота, показанному на Рисунке 5. На Рисунке 6 ясно видны частоты  $\delta$ -образных функций, которые располагаются в местах локализации затемненных пучностей, выявленных на Рисунке 5. Отсюда можно заключить, что, в пределах  $d/\lambda \rightarrow \infty$  и  $N \rightarrow \infty$ , данные  $\delta$ -образные функции будут стремиться к  $\delta$ -функциям Дирака. Более детально появление фрактальных интерференционных паттернов в ближней зоне описано в работах Берри [4,10,11].

#### 4. Дуальная природа волны-частицы

Взглянем снова на формулы, выписанные в Главе 2. Начнем с формул (3) и (4). Можно видеть, что наряду с переменными  $x, z$ , представляющих положение точечной частицы на плоскости за щелевым экраном в текущий момент времени  $t$ , также представлены и ее атрибуты, такие как масса частицы  $m$ ,  $z$ -компонента ее импульса  $p_z$ , и параметр, обеспечивающий связь величин разных размерностей. Данный параметр, названный постоянной Планка, в честь ее первооткрывателя, имеет размерность *Энергия·Время*, или *Импульс·Длина*. Отсюда видно, что этот параметр обеспечивает связь таких сущностей материального тела, как-то его энергия и импульс, с его отношением к пространственно-временному континууму. Тело, имеющее некоторую кинетическую энергию  $E$  и импульс  $\mathbf{p}$ , может быть локализовано в момент времени  $t$  в окрестности точки  $\mathbf{r}$ . Такая конструкция не противоречива, если тело является классическим макроскопическим объектом. Что касается квантовых объектов, здесь следует по-новому взглянуть на понятие континуума.

Давайте допустим, что пространственно-временной мир заполнен всевозможными волнами со различными длинами волн по пространственным осям и с разными частотами по временной оси. Принимая, в простейшем варианте, декартову систему координат, полагается, что волны, заполняющие пространственно-временной континуум, являются плоскими волнами. Их математическим образом является функция  $\exp\{\mathbf{i}(\mathbf{kr}) - \mathbf{i}\omega t\}$ .

Отмеченные волны простираются от минус бесконечности до плюс бесконечности. Только в этом пределе можно говорить определенно о конкретных характеристиках волны - длине волны  $\lambda$  и частоте  $\omega$ . Цуг конечной длины уже будет представляться пакетом волн с длинами волн и частотами, разбросанными вокруг некоторых средних  $\lambda$  и  $\omega$ . Здесь к месту можно отметить, что функции  $\exp\{\mathbf{i}(\mathbf{kr}) - \mathbf{i}\omega t\}$  в технике вторичного квантования выступают как фазовые множители в операторах рождения  $\mathbf{a}^\dagger$  и уничтожения  $\mathbf{a}$  частиц. Произведение  $\mathbf{n} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$  представляет оператор числа частиц, проявленных в четырехмерном пространстве-времени. Будем говорить, что пространственно-временной мир виртуально заполнен такими волнами. Слово «виртуальность» подразумевает, что четырехмерная среда потенциально в состоянии поддерживать эти волны. Но отсюда не следует, что они существуют в наличии.

В качестве примера давайте рассмотрим полый резонатор электромагнитных волн. Резонатор может поддерживать волны, длины волн которых кратны метрическим размерам данного резонатора. Но пока не подводится к нему электромагнитная энергия, датчик не обнаружит в резонаторе наличия каких-либо волн. Надо подвести энергию к резонатору, чтобы в нем возбудить электромагнитную волну, но только с такой длиной волны, которая укладывается кратно в полости резонатора. Из этого примера, в частности, следует, что волны, поддерживаемые резонатором, могут иметь только такие длины волн  $\lambda$ , которые кратно укладываются в его полость. Пространственно-временной континуум простирается во все стороны до бесконечности. В таком резонаторе могут укладываться волны с длинами волн и частотами, простирающимися от нуля до бесконечности. Все эти волны виртуальны в том смысле, что в реальности они отсутствуют. Но чтобы какая-либо волна могла бы существовать реально, ее следует возбудить. Каким способом? Внедрить частицу с энергией  $E$  и импульсом  $\mathbf{p}$  в данное пространство. И вот здесь мы подошли к важному моменту в становлении квантовой механики [12]. В 1924 году Луи де Бройль озвучил гипотезу, что все материальные объекты (частицы и не только свет) наделены волно-подобной природой. Связь между длиной волны  $\lambda$  и импульсом частицы  $\mathbf{p}$ , которую он привел, имеет исключительно простой вид:



$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (9)$$

Этому утверждению предшествовала формула Эйнштейна. Он постулировал, что электрон может получать (отдавать) электромагнитную энергию  $E$  порциями, а именно

$$E = h f. \quad (10)$$

Здесь  $h \approx 6.626 \cdot 10^{-34}$  Джоуль·сек является постоянной Планка, а  $f$  – частота излучения (поглощения) электромагнитной волны. Умножая и деля правую часть формулы (10) на  $2\pi$ , эта формула принимает вид  $E = \hbar \omega$ . Здесь теперь  $\hbar = h/2\pi$  – редуцированная постоянная Планка, а  $\omega = 2\pi f$  – циклическая частота излучения (поглощения).

Прозорливый читатель наверное уже заметил, что выше были противопоставлены материальная частица, с одной стороны, и возбужденная ей волна, с другой. Ее волновые характеристики, задаются формулами (9) и (10). Эта волна представляет де Бройлевскую пилот-волну, которая в результате определяет оптимальный путь частицы. Также как и в случае резонатора электромагнитных волн, экспериментатор может ограничить рабочее пространство. А также нагрузить это пространство дополнительными деталями (решетки, зеркала, коллиматоры и т.д.). Все это вносит искажения в возможную волновую картину, поддерживаемую в экспериментальной установке. Иными словами, все окружение задает краевые условия для формирования волнового поля. Любой паттерн де Бройлевской пилот-волны, который возникает в рабочем пространстве экспериментальной установки, определяется сформированными экспериментатором краевыми условиями. Как только в данное пространство влетает частица с заданной энергией  $E$  и заданным импульсом  $p$ , она попадает под влияние пилот-волны, волновой паттерн которой поддерживается рабочим пространством установки.

В рабочем пространстве экспериментальной установки *виртуально* сосуществуют волновые паттерны, соответствующие частицам с разными энергиями и импульсами. Эта виртуальность, по сути, предопределяется краевыми условиями, которые готовятся экспериментатором в процессе проработки задуманного эксперимента. Виртуальные волновые паттерны – это множественные миры, существующие параллельно. Следует особо подчеркнуть, что эти миры не имеют никакого отношения к мирам Эверетта [13]. Последние проявляют себя в момент измерения – вероятностные свойства волновой функции проявляют какой-либо Эвереттовский мир случайным образом. В отличие от предложенной Эвереттом версии, упомянутые выше множественные миры являются виртуальными мирами, проявляемыми себя через волновые поля (волновые функции) в пространстве с заданными изначально краевыми условиями. Любая частица, с заданными энергией  $E$  и импульсом  $p$ , подхватывается волновым полем, характеристики которого определяются соотношениями (9) и (10). Это де Бройлевская пилот-волна, определяющая фон при движении частицы на пути от источника к детектору.

Следует заметить, что частица и де Бройлевская пилот-волна являются разными, но дополняющими друг друга, сущностями. Например, при возбуждении электромагнитной волны в резонаторе требуется подвод энергии к нему. Это может быть достигнуто за счет специально организованных потоков электронов, которые, собственно, и возбуждают желаемую электромагнитную моду. В свою очередь, частица, запущенная в пространство экспериментальной установки, инициирует появление соответствующего волнового поля.

Факт регистрации частицы, который связывают с коллапсом волновой функции, является ничем иным как изъятием из экспериментальной установки объекта, инициирующего заданное волновое поле.

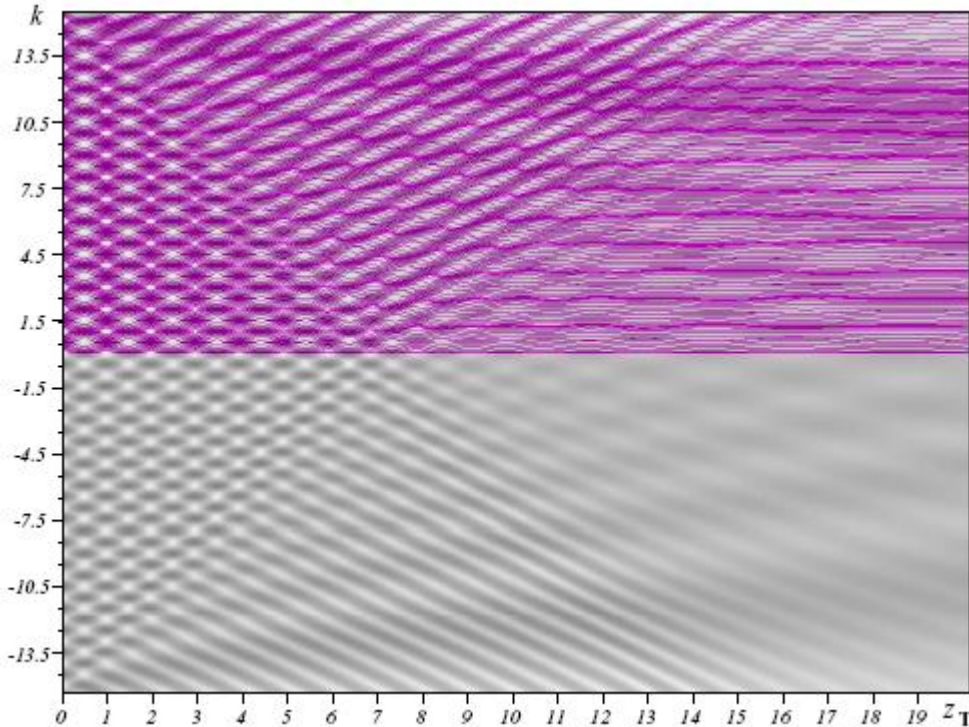
Выше приведенные доводы могут показаться кому-либо спорными. На самом деле, слова, чаще всего допускающие многозначную трактовку, не всегда могут служить веской основой при доказательствах тех или иных утверждений. Вот почему математика является языком науки - она не допускает многозначных трактовок математических выражений. В таком случае, давайте все то же самое изложим с привлечением математических формул. Здесь не преследуется цель давать строгий математический отчет. Но задача заключается в том, чтобы показать, ученые заложили некоторый фундамент, подтверждающий выше изложенные доводы.

Следует отметить следующий хронологический порядок, в 1926 году появляется статья Шредингера [14], в которой впервые представлено уравнение, далее названо его именем. В том же самом году появляется статья Маделунга [15], в которой показано, что явления нерелятивистской квантовой механики могут быть однозначно описаны двумя связанными уравнениями – квантовый аналог уравнения Гамильтона-Якоби и уравнение непрерывности плотности вероятности. Ба! Но ведь это – та же самая система уравнений, которую в 1952 году вывел Бом [16], в попытке обосновать де Бройлевскую гипотезу «скрытых параметров». К сожалению, статья Маделунга опубликована на немецком языке и по этой причине она оказалась не достаточно хорошо знакома научной общественности. Основная мысль, которую желал донести до общественности Маделунг, сводится к тому, что амплитудная часть волновой функции, описываемая уравнением непрерывности, есть аналог несжимаемой жидкости, которая, в согласии с законами, аналогичными законам гидродинамики, заполняет все доступное пространство экспериментальной установки. Теперь можно сказать, такой несжимаемой жидкостью является вакуум, проявляющий воистину удивительные свойства [17]. Движение частицы в такой среде описывается квантовым уравнением Гамильтона-Якоби. Данное уравнение содержит экстремум-член, тот самый квантовый потенциал Бома, который связывает уравнения Гамильтона-Якоби и непрерывности. Так как уравнение Гамильтона-Якоби следует из основополагающего принципа механики – *принципа наименьшего действия* (более грамотно следовало бы этот принцип называть принципом стационарного действия), оно указывает наиболее оптимальную траекторию для частицы. Это есть геодезическая траектория частицы, называемая траекторией Бома. Таким образом, задав в начальный момент координаты и импульс частицы (очевидно, с точностью до гейзенберговской неопределенности), в последующем движение частицы будет происходить по одной из геодезических, бомовских, траекторий.

Параллельно с этим направлением мысли развивался и немного другой взгляд на квантово-механические явления. Почему я употребил слово «параллельно», в обоих случаях пристальное внимание уделяется интегралу действия  $S = \int L(q, \dot{q}, t) dt$  (где  $L(q, \dot{q}, t)$  – лагранжиан системы, зависящий от координат  $q$ , скоростей  $\dot{q}$ , а возможно, и времени  $t$ ) и его вариациям по траекториям в пространстве состояний. В первом подходе, имеют дело с результатом этих вариаций – с уравнениями Гамильтона-Якоби и непрерывности. Во втором подходе рассматривается непосредственно механизм вариаций.

П. Дирак, при посещении советских ученых в 1933 году, опубликовал работу [18], в которой заострил внимание на члене  $\exp\{iS/\hbar\}$ , который может играть роль функции распространения (propagator) при движении частицы от источника к детектору. Здесь  $S$  есть классическое действие. Идею, озвученную перед советскими физиками, он развил в

1945 году [19]. Дираковские наблюдения придали мощный импульс Фейнмановским изысканиям и в 1948 году он публикует работу [20], в которой включает в рассмотрение не только классические пути, но и множество других путей. Он отвел ведущую роль члену  $\exp\{iLdt/\hbar\}$  как амплитуде перехода между состояниями (здесь  $L$  – лагранжиан перехода), разделенными инфинитезимальным промежутком  $dt$ , и его глубокой связи с принципом наименьшего действия в классической механике [9].

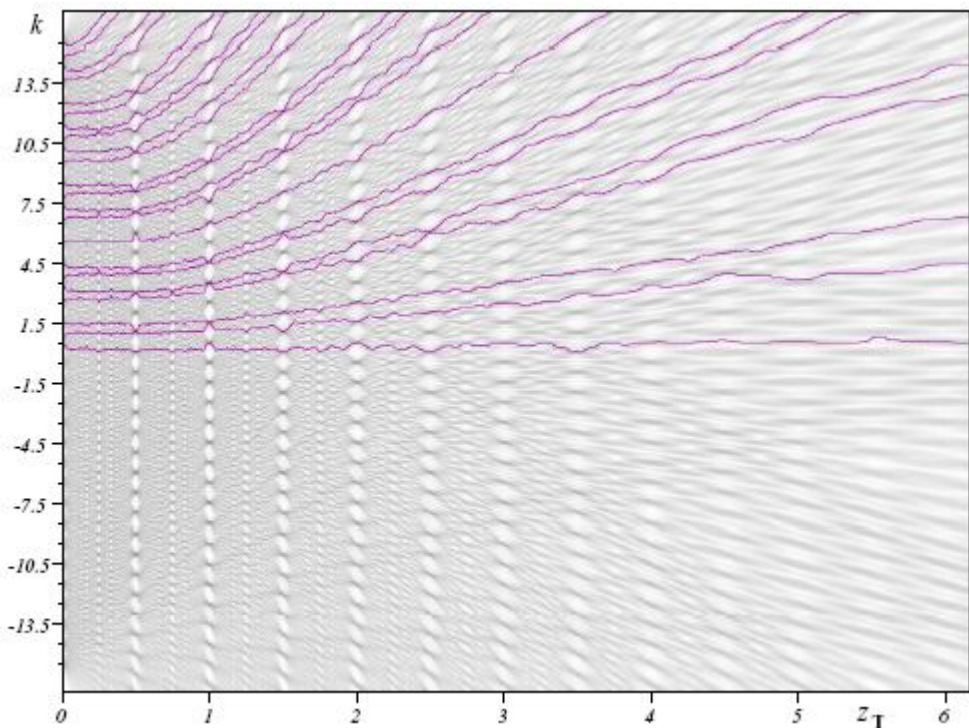


**Рисунок 7**

Интерференция на щелевой решетке  $N = 32$ ,  $\lambda = 5$  нм,  $d = \lambda$ ,  $z_T = 10$  нм. В верхней части фиолетовым цветом показаны боровские траектории. Хорошо виден ламинарный характер истечения траекторий.

$$k = n - \frac{(N-1)}{2},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, (N-1).$$



**Рисунок 8**

Интерференция на щелевой решетке  $N = 32$ ,  $\lambda = 5$  нм,  $d = 10\lambda$ ,  $z_T = 1000$  нм. В верхней части фиолетовым цветом показаны боровские траектории. Характер истечения траекторий имеет турбулентные признаки.

$$k = n - \frac{(N-1)}{2},$$

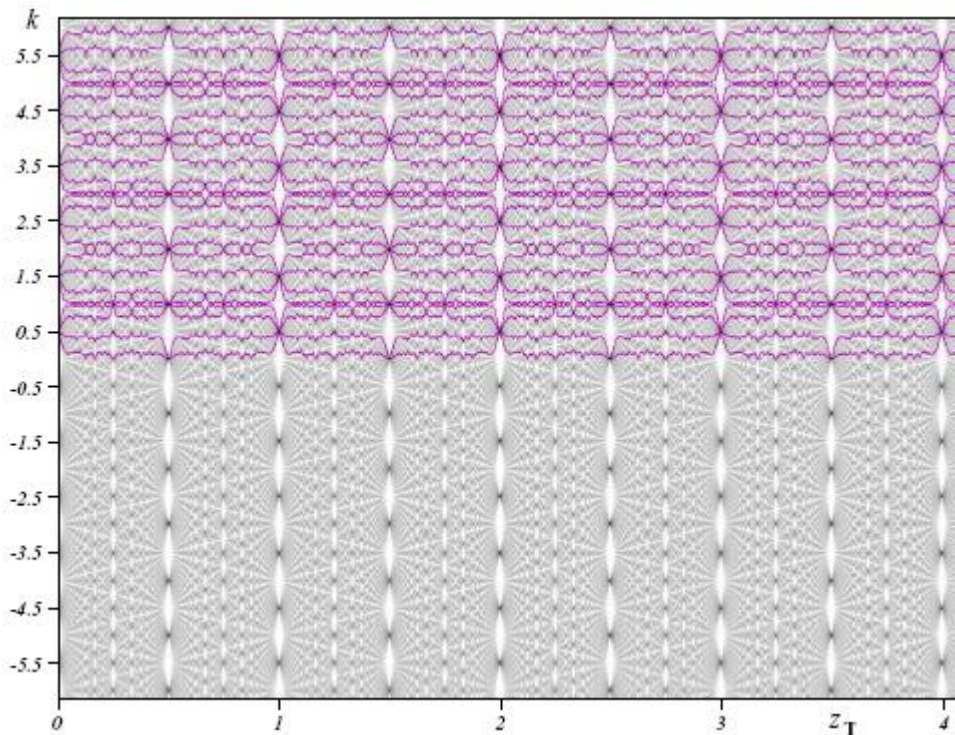
$$n = 0, 1, 2, \dots, (N-1).$$

Суть Фейнмановских идей заключается в том, что, при движении от источника к детектору, частица инициирует каскады рождений виртуальных пар частица-античастица, которые, в свою очередь, «зондируют» окружающее пространство с последующей их аннигиляцией. Виртуальные траектории таких пар частица-античастица не удовлетворяют принципу наименьшего действия. А поэтому, эти траектории, в результате, дают нулевой

интерференционный эффект. И только единственная траектория остается реальной траекторией, которая подчинена принципу наименьшего действия. Данная траектория представляет геодезическую траекторию частицы – бомовскую траекторию [21].

## 5. Талбот-эффект, бомовские траектории и возникающие, в связи с этим, вычислительные проблемы

На Рисунках 7 и 8 показаны распределения плотностей вероятностей, полученных при интерференции с решеток, имеющих  $N=32$  щелей. В первом случае  $d/\lambda=1$ . Можно видеть хорошо упорядоченные гексагональные распределения узлов и пучностей плотности вероятности. Во втором случае  $d/\lambda=10$  и мы видим, что упорядоченность проявляет экзотический характер только вблизи щелей. Бомовские траектории, нарисованные фиолетовым цветом в верхней части рисунков, также имеют качественные отличия. В первом случае это хорошо упорядоченные потоки ламинарного типа. Во втором случае они проявляют признаки расходящихся потоков. В этом случае можно видеть, что в ближней окрестности решетки интерференция обнаруживает признаки Талбот паттерна. При удалении от решетки эти признаки быстро разрушаются. Таким образом, количества щелей  $N=32$  явно не достаточно, чтобы иметь ярко выраженный Талбот-эффект.



**Рисунок 9**

Интерференция на щелевой решетке  $N = 512$ ,  $\lambda = 5$  нм,  $d=10\lambda$ ,  $z_T=1000$  нм. В верхней части фиолетовым цветом показаны бомовские траектории. Ясно просматривается турбулентность траекторий на каждом периоде Талбота. Так же хорошо видна упорядоченная решетка ковров Талбота.

$$k = n - \frac{(N-1)}{2},$$

$$n=0,1,2,\dots,(N-1).$$

Зададим решетку с  $N=512$  щелями. Это число достаточно большое, чтобы можно было наблюдать ярко выраженный Талбот-эффект. Интерференционный паттерн, который представляет собой упорядоченно размещенные Талбот ковры, показан на Рисунке 9. Чем больше  $N$ , тем большее пространство может быть покрыто коврами Талбота. Более того, чем больше отношение  $d$  к  $\lambda$ , тем более совершенны ковры Талбота. Эти условия были сформулированы в работах М. Берри и его коопманьонами [4,10,11].

Гауссов волновой пакет применили А. Санз с С. Мирет-Артес при исследовании интерференции с  $N$ -щелевой решетки [8]. В частности, там же они изучили возможность проявления Талбот-эффекта. Однако реальный Талбот-паттерн ими не был получен. Эта неудача обусловлена, на мой взгляд, двумя причинами: (а) не выполнены выше названные

условия Берри; и как бы это ни странно звучало, (б) они рисовали бомовские траектории на чистом листе. Что касается последнего пункта, здесь следует пояснить, что пучки бомовских траекторий на коврах Талбота представляют довольно сложный паттерн (см., например, Рисунок 9), чтобы увидеть за ним проявление Талбот-эффекта. Вычерчивание бомовских траекторий поверх карты распределения плотности вероятностей позволило бы выявить их соответствие с ковром Талбота, если он на самом деле проявляется в интерференционном паттерне. Этот прием вычерчивания впервые предложила Pira (администратор сайта «Квантовый Портал»). Она детально разработала программу, которая вычисляет интерференционные паттерны с  $N$ -щелевых решеток, строит 2D-карту распределения плотности вероятности и вычерчивает на ней пучки бомовских траекторий. Именно с помощью этой программы появилась возможность обнаружить Талбот-эффект и ясно увидеть, как и каким образом бомовских траекторий проходят через эту область. За эту качественную работу автор ей глубоко признателен.

\* \* \*

Пипа (Pira – администратор Квантового Портала) составила программу по вычислению и рисованию почти всех рисунков в этой статье. Автор ей премного благодарен.

### Литература

1. [http://en.wikipedia.org/wiki/Talbot\\_effect](http://en.wikipedia.org/wiki/Talbot_effect).
2. [http://en.wikipedia.org/wiki/William\\_Henry\\_Fox\\_Talbot](http://en.wikipedia.org/wiki/William_Henry_Fox_Talbot).
3. [http://en.wikipedia.org/wiki/Louis\\_Daguerre](http://en.wikipedia.org/wiki/Louis_Daguerre).
4. M. Berry, I. Marzoli, and W. Schleich: [2001] *Quantum carpets, carpets of light*, Phys. World (6) pp. 1-6.
5. В. И. Сбитнев: [2009] "Рассеяние частиц на  $N$ -щелевом экране: ковры Талбота и дифракция в дальней зоне", Квантовая Магия, том 6, вып. 1, стр. 1101-1112.
6. В. И. Сбитнев: [2009] "Интерференция с  $N$ -щелевого экрана: волновой рельеф и движения по траекториям в этом рельефе", Квантовая Магия, том 6, вып. 3, стр. 3101-3113.
7. A. S. Sanz and S. Miret-Artes: [2007] *A causal look into the quantum Talbot effect*, J. Chem. Phys. **126**, 234106.
8. A. S. Sanz and S. Miret-Artes: [2008] *A trajectory-based understanding of quantum interference*, J. Phys. A: Math. Gen. **41**, 435303.
9. Р. Фейнман, А. Хибс: [1968] Квантовая механика и интегралы по траекториям. (Пер с англ. — М.: Мир).
10. M. V. Berry and S. Klein: [1996] *Integer, fractional and fractal Talbot effects*, JOURNAL OF MODERN OPTICS **43**(10) 2139-2164.
11. M. V. Berry: [1996] *Quantum fractals in boxes*, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 6617-6629.
12. [http://en.wikipedia.org/wiki/Wave%E2%80%93particle\\_duality](http://en.wikipedia.org/wiki/Wave%E2%80%93particle_duality).
13. A. Valentini: [2009] *De Broglie-Bohm Pilot-Wave Theory: Many Worlds in Denial?* In: Everett and his Critics, eds. S. W. Saunders et al. (Oxford, University Press).
14. E. Schrodinger: [1926] *An undulatory theory of the mechanics of atoms and molecules*, Phys. Rev., **28**(6), 1049-1070.
15. E. Madelung: [1926] *Quantentheorie in Hydrodynamischer form*. Zts. f. Phys, **40**, 322-326.
16. D. Bohm: [1952] *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "Hidden Variables"*, Physical Review, **85**, 166-193.
17. А. П. Мартыненко: [2001] *Вакуум в современной квантовой теории*, Соросовский Образовательный Журнал, **7**(5), 86-91.

18. P. A. M. Dirac: [1933] *The Lagrangian in quantum mechanics*, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, **3**, 64-72.
19. P. A. M. Dirac: [1945] *On the analogy between classical and quantum mechanics*, *Rev. Mod. Phys.* **17**(2 and 3), 195-199.
20. R. P. Feynman: [1948] *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 367.
21. В.И. Сбитнев: [2008] *Бомовские траектории и парадигма интегрирования по путям. Комплексная Лагранжева механика*, *Квантовая Магия*, том **5**, вып. 4, стр. 4132-4147.