Квантовая Магия, том 6, вып. 2, стр. 2110-2132, 2009

Геометрия субъективной[1] Вселенной

А.В. Каминский

(Получена 31 марта 2009; опубликована 15 апреля 2009)

Исследуются метрические и топологические аспекты модели субъективной физики [1-6]. Показано, что субъективная аксиоматика, выражающаяся в нескольких принципах общего характера, ограничивает возможный выбор топологии и геометрии физического мира вполне реалистическими моделями.

Введение

Проективная геометрия и субъективная неполнота

Проективные многообразия представляют собой множества классов эквивалентности. Трудно не заметить параллель - каждое физическое состояние так же является классом эквивалентности. Так, например, чистое квантовое состояние описывается волновой функцией (ВФ) с точностью до произвольного фазового множителя. При этом множество неразличимых фаз образует класс эквивалентности или группу $U(1)$ физически неразличимых преобразований вектора состояния системы. Существование скрытого множества состояний обосновывается, так называемой, физической неполнотой [1], отражающей неполноту описания мира его же субъектом.

Далее будем опираться на следующие принципы:

Принцип 1: Мир – конечное множество состояний W, отображающееся в себя самого взаимно однозначным образом, так, что любое состояние этого множества является либо причиной, либо следствием любого его состояния. Такая структура, представляет собой конечный связный ориентированный граф, содержащий Гамильтонов цикл.

Определение 2: Траекторией ξ называется последовательность $x;\ T(x);\ T^2(x)\ldots,$ где T – оператор перехода причины в следствие.

Следствие 1: Если A является причиной B, а B является причиной C, то A является причиной C

Следствие 2: Каждое состояние является причиной самого себя. Доказательство: Если бы имело место обратное, то это приводило бы к существованию счетно-бесконечной цепи причинно – следственных связей, что противоречило бы *принципу 1*.

---

[1] Использование термина "субъективность" по отношению к физике отражает тот факт, что в рамках конечных моделей, содержащих наблюдателя, физические законы имеют конфигурационный по отношению к наблюдателю (субъекту) характер.

Принцип 2: множество состояний замкнутой системы (мира) W факторизуется следующим образом: $W = S \otimes H$, где S – множество физических состояний субъекта (наблюдателя), а H- множество скрытых состояний Вселенной недоступных для наблюдателя.

Разделив мировое множество W на субъективную и скрытую части (*принцип 2*), мы избегаем логических коллизий [7],[8], свойственных унарным отношениям в замкнутых аксиоматических системах. Мы имеем в виду теоремы Геделя из которых следует неизбежность выбора между противоречивостью и неполнотой.

Проективная геометрия [9],[10] наилучшим образом отражает субъект - объектную структуру мироустройства (мир – наблюдатель), отражающуюся в физических законах.
Над конечным полем событий совершенно естественным образом может быть построена дискретная проективная геометрия (см. Приложение). Геометрии на континууме производны и, по всей видимости, могут рассматриваться, как удобное асимптотическое приближение в пределе большого числа состояний. Имея это в виду, далее мы будем пользоваться дифференциальной геометрией, поскольку ее аппарат привычен и разработан гораздо в большей мере, чем аппарат дискретной геометрии.
Рассмотрим непрерывную проективную плоскость [11]. Пусть $\{\xi_{1,}\, \xi_{2,}\, \xi_3\}$ - однородные координаты (вектор в некотором "вспомогательном" пространстве $\mathbf{R}^3$). Подобно рассмотренному в приложении дискретному случаю (проективной плоскости, построенной над $GF(2^3)$), здесь так же классы пропорциональных троек задают точки на проективной плоскости R$\mathbf{P}^2$. Однако, это уже тройки действительных чисел. Область R$\mathbf{P}^2$ с $\xi_3 \neq 0$ можно представить аффинными координатами ξ_1/ξ_3 и ξ_2/ξ_3 . Область же с $\xi_3 = 0$ $\{\xi_{1,}\, \xi_{2,}\, 0\}$ как раз и является бесконечно удаленной прямой. Нулевой вектор $\{0,0,0\}$ не является элементом проективного пространства.

Рассмотрим сферу S^2 в трехмерном пространстве R^3. Множество ее радиус- векторов (классы пропорциональных действительных троек) образует проективную плоскость RP^2. С другой стороны, проективная плоскость RP^2 образуется из аффинной плоскости R^2 добавлением бесконечно удаленной прямой RP^1 (компактификация) $\mathrm{RP}^2 = R^2 \cup \mathrm{RP}^1$.
Замечательно, что окрестность любой прямой на RP^2 диффеоморфна ленте Мебиуса. Это ясно из следующего рисунка. Здесь сфера лежит своим южным полюсом на плоскости, любая точка которой проецируется из центра сферы. То есть любая точка плоскости представляется парой точек на сфере, симметричных относительно центра.

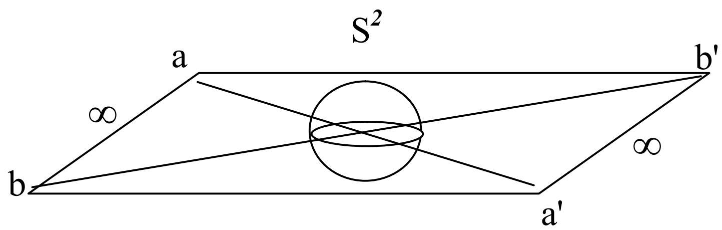

рис.3

В общем случае, проективным пространством RP^n над полем вещественных чисел называют множество прямых евклидового пространства R^{n+1}, проходящих через начало координат. Его можно представить как сферу S^n с отождествленными противоположными точками. На рисунке дуги большого круга S^2 проецируются на ab и a'b' – отрезки бесконечно удаленной прямой RP^1. По определению это один и тот же отрезок, сшивающий RP^2 на бесконечности. Как видно, сшивка происходит с переворотом, образуя, тем самым топологию листа Мебиуса. Не трудно понять, что сфера с одним выколотым полюсом гомеоморфна Евклидовой плоскости. Однако, сфера без дырок совсем другой объект. (Аналогично, расширенная плоскость Аргана: $C \cup \{\infty\}$ возникает при проецировании сферы Римана) (топологически проективная плоскость получается приклеиванием к полусфере листа Мебиуса).

Возьмём на листе Мёбиуса точку, и построим на ней тройку векторов (репер), так, что 2 вектора будут лежать в плоскости, а третий будет перпендикулярен к ней. Назовем этот вектор "спином" ибо он определяет направление вращения вокруг этой точки. Начнем перемещать эту точку вдоль ленты Мебиуса. Сделав круг (2π) мы придем в исходную точку, но теперь "спин" изменил направление. Направление спина вернется в исходное, если сделать еще один круг вдоль ленты Мебиуса. То есть, в общей сложности, мы должны обойти ленту 2 раза (4π). Для большей наглядности, можно представить контурное изображение, например, правой ладони руки на поверхности Мебиуса. Обойдя круг и вернувшись в исходную точку, ладонь изменит симметрию на левую и, очевидно, не будет совпадать со своим исходным изображением. И только, сделав еще один круг, ладонь опять станет правой и может быть совмещена со своей исходной конфигурацией. Поверхности, обладающие такой особенностью, называются односторонними или неориентируемыми. Такая структура является глобально нетривиальным расслоением. В данном случае – двулистным накрытием. Проективная плоскость является базой в Булевом расслоении. $RP^2 = S^2 / Z_2$. Каждой точке на ней сопоставляются 2 точки на сфере S^2.

Фундаментальный характер проективного пространства не вызывает сомнений. Во-первых, структура проективного пространства возникает из первых принципов на основе простейших представлений о групповом характере причинно-следственных связей. Во-вторых оно отражает субъект объектную природу физической реальности, приводящую к необходимости рассмотрения расслоения $W = S \otimes H$, топология которого, как мы покажем ниже имеет нетривиальный характер. И, в-третьих, в отличие от аффинного пространства, это гладкое многообразие обладает свойствами замкнутости и компактности[2], что привлекательно для построения самосогласованной модели.

[2] Согласно известной теореме о классификации поверхностей среди всех компактных, связных, замкнутых гладких многообразий проективная плоскость однозначно определяется тем, что она неориентируема и её эйлерова характеристика равна *1*.

Специальная теория относительности и проективная геометрия

Проективная интерпретация СТО хорошо известна. Одним из первых на эту аналогию обратил внимание Ф.Клейн. Покажем, что за этой формальной математической конструкцией лежит более глубокий пласт понимания сущности релятивизма.
Далее мы пользуемся следующей индексацией координат $t, x, y, z, x^h \to 0,1,2,3, h$. Буквой - h (hide) будем обозначать 4-ю считая от 0 координату. Запись $\{x^i, x^h\}$ означает пространство, где x^i; $i = 0,1,2,3$ - наблюдаемые координаты, x^h - скрытая координата.
В объективном пространстве имеет смысл обычная положительно определенная метрика:

$$dx^\alpha x^\alpha + (dx^h)^2 = c^2 dt^2. \qquad (1)$$

В таком описании время характеризует длину пути в пространстве $\{x^\alpha, x^h\}$; $\alpha = 1,2,3$. Но координата x^h явно в физических явлениях не проявляется и не зависит от физических координат x^α. Поэтому формально скрытая координата ортогональна физическому четырехмерному базису. Если быть точнее, то x^h связана с x^α [4], но эта связь не обнаружима явно. Имеет место некое подобие стробоскопического эффекта. За время пока наблюдатель переходит из одного наблюдаемого состояния в другое $x^\alpha \to x^\alpha + \Delta x^\alpha$ скрытая координата делает цикл и возвращается к исходному значению, так, что ее изменение не может быть наблюдено $x^h \to x^h + nL$, где L – длина пути вдоль x^h. Может показаться, что эта конструкция несколько искусственна. Однако, это так же следствие *принципов 1 и 2,* согласно которым наблюдатель и любая система, взаимодействующая с ним, описываются циклическими процессами. Легко понять, что в этом случае, наблюдаемы только те объекты внешнего мира, которые имеют кратные частоты по отношению к собственной частоте наблюдателя (стробоскопический эффект). Все остальные объекты (частицы) с не кратными частотами образуют флуктуирующий вакуумный фон. Независимость x^h от x^α выражается в инвариантности комбинации:

$$c^2 dt^2 - dx^\alpha dx^\alpha = (dx^h)^2 = inv. \qquad (2)$$

Это несколько иная запись этой формулы(1), из которой следует и иная физическая интерпретация. Как хорошо известно, она приводит к пространствам с индефинитной метрикой и, как следствие к специфическим релятивистским закономерностям – это субъективная или физическая интерпретация. Рассмотрим группу проективных преобразований:

$$x^i = a^i_j x^j \qquad (3)$$

Аффинные координаты X^i пространства - времени определяются через однородные координаты следующим образом: $X^i = \dfrac{x^i}{x^h}$

Чтобы найти преобразования, соответствующие движениям в физическом пространстве – времени, мы должны ограничить группу проективных преобразований (3) подгруппой оставляющей инвариантной комбинацию (2). Известно, что такой подгруппой является группа Лоренца. На этом мы закончим, поскольку последний факт хорошо известен. Для тех, кто захочет провести формальный вывод, подскажем простой путь. Расстояние между точками должно, очевидно, сохраняться и на бесконечно удаленной прямой $x^h = 0$. Нужно рассмотреть систему уравнений:

$$\left(x^0\right)^2 - x_\alpha x^\alpha = 0;\ \alpha = 1,2,3$$
$$x^h = 0$$

Ее корнями являются две точки на бесконечно удаленной прямой. Требованию сохранять между ними расстояние удовлетворяет следующая подгруппа группы (3):

$$x^i = a^i_j x^j;\ i = 0,1,2,3;\ j = 0,1,2,3,h$$
$$x^h = a^h_h x^h$$

Легко показать, что это и есть группа Лоренца. Подробности смотрите в [9] .При переходе к аффинным координатам X^α, t получим преобразования Лоренца. Таким образом, теория Лоренца – Минковского -Эйнштейна является тривиальным следствием субъективной неполноты и конечности мира. Мировая эргодическая траектория лежит на гладком 4-х мерном многообразии, которое в проективной геометрии иногда называют абсолютом :

$$x_\alpha x^\alpha - c^2 t^2 + \left(x^h\right)^2 = 0 \qquad (4)$$

Любое сечение $x^h = const$ этой поверхности является экземпляром (слоем) физического пространства - времени. Все кривые ζ, образованные пересечением $x^h = const$ и поверхности (4) инвариантны относительно группы проективных преобразований, действующих в физическом слое $x^h = const$. То есть каждое проективное отображение плоскости $x^h = const$ в себя оставляет на месте линию ζ (автоморфизм относительно ζ). Таким образом, поверхность (4) определяет возможные в физическом слое преобразования.

Посмотрим, какие еще следствия для физики можно получить из этого простейшего принципа. В этом параграфе мы рассмотрели локальные проективные свойства пространства. Ниже мы рассмотрим нетривиальный характер этого расслоения, который обусловлен глобальными топологическими свойствами мира, как целого.

Глобальная топология субъективного мира

Принципиальным для дальнейшего рассмотрения моментом является независимость субъективных степеней свободы x^α, t от скрытой степени свободы x^h. Это условие, известное, как условие цилиндричности, чисто формально использовалось в ранних

многомерных теориях. В нашем же случае оно имеет понятный физический смысл и является ***аналитическим выражением субъективной неполноты мира***.
Рассмотрим общие преобразования координат в объективном пространстве:

$$\begin{cases} (x^s)' = f_1(x^s, x^h) \\ (x^h)' = f_2(x^s, x^h) \end{cases} \quad \text{При наложении условия цилиндричности } \frac{\partial x^s}{\partial x^h} = 0 \text{ сужается до:} \quad \begin{cases} (x^s)' = f_1(x^s); \\ (x^h)' = x^h + f_2(x^s) \end{cases} \qquad (5)$$

Здесь для наглядности записи мы использовали индексы: s – subj и h – hide, пробегающие значения 0,1,2,3 и 4 соответственно. Вычислим компоненты G_{sh} метрического тензора G_{ik}. С учетом условия независимости физических координат от скрытой координаты x^h, из (5) получим:

$$G_{sh} = \frac{\partial(x^i)'\partial(x^i)'}{\partial x^h \partial x^s} = \cancel{\frac{\partial(x^s)'\partial(x^s)'}{\partial x^h \partial x^s}} + \frac{\partial(x^h)'\partial(x^h)'}{\partial x^h \partial x^s} = \frac{\partial x^h}{\partial x^s} \qquad (6)$$

В формальном аспекте, здесь мы следуем идее Калуцы [12,13], показавшего еще в начале прошлого века, что специфическая (основанная на условии цилиндричности) редукция пятимерной теории гравитации к 4-м измерениям приводит к уравнениям Максвелла и старой теории гравитации. Это "Чудо" Калуцы и лежащий в его основе принцип получения калибровочных полей, и в настоящее время является основным лейтмотивом теорий Великого Объединения. Однако, само существование высших измерений и в то же время "таинственное" требование $\frac{\partial x^s}{\partial x^h} = 0$ остается чисто формальным "фокусом". Ключевая идея "развязки" физических и дополнительных измерений наложением специальных условий цилиндричности впоследствии была заменена компактификацией метрики $R^5 = R^4 \otimes S^1$ (замыканием дополнительной координаты на микроскопическом масштабе [14]). Тем самым, вопрос о сущности дополнительных измерений был "заметен под ковер". Напомним, что в нашей интерпретации условие цилиндричности возникает совершенно естественным образом и является ***аналитическим выражением субъективной неполноты мира***.

Скрытый метрический вектор G_{sh} при этом отождествляется с физическими полями. Например с инвариантным потенциалом ЭМ поля A_s. В этой интерпретации $dx^h = A_s dx^s$ и ***скрытая координата приобретает смысл действия*** (с точностью до константы e/c). На этой основе Ю.Б.Румер построил свою "пятиоптику"[15]. То, что действие имеет смысл дополнительной размерности имеет весьма глубокие основания. Об этом мы поговорим позже, а сейчас Еще один "фокус" Калуцы!. Возьмем производную по x^s от второго уравнения (5).

$$\frac{\partial(x^h)'}{\partial x^s} = \frac{\partial x^h}{\partial x^s} + \frac{\partial f}{\partial x^s}$$

Мы получили градиентную инвариантность (калибровочное преобразование) для электромагнитного поля: $\left(A_s\right)' = A_s + f\left(x_s\right)$. Теперь становится понятно, что калибровочная структура теории, положенная в основу всех современных теоретических построений, навязывается тем же самым принципом субъективной неполноты, приводящим к существованию скрытого измерения x^h. Покажем, что x^h в рассматриваемой интерпретации с необходимостью является дополнительным измерением, а не скалярным полем. Рассмотрим циркуляцию: $\oint A_s dx^s$. По теореме Стокса имеем:

$$\oint A_s dx^s = \int_\sigma \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} \right) d\sigma = \int_\sigma F_{\alpha\beta} d\sigma \qquad (7)$$

где: $F_{\alpha\beta} = \dfrac{\partial^2 x^h}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} - \dfrac{\partial^2 x^h}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}$ - тензор напряжений поля.

Если бы x^h был скаляром, то $F_{\alpha\beta}$ был бы равен нулю в силу коммутативности дифференцирования скаляров[3]. Но так как тензор электромагнитного поля отличен от нуля, то и x^h обязан быть вектором. Заметим, что в рассматриваемой геометрической интерпретации тензор электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ является кривизной пространства $\left\{x^s, x^h\right\}$. Локальная кривизна пространства интерпретируется субъективным наблюдателем, как наличие магнитного поля.

Итак, мы видим, что, по крайней мере, физические законы электромагнетизма и гравитации могут быть обусловлены расслоением $R^5 = R^4 \otimes S^1$ и определяются топологией объективного мира (см. *Принцип 2*). Протяженные измерения R^4, возможно так же замкнуты через бесконечно удаленные точки проективного многообразия. Результат интегрирования в субъективном пространстве (физическом пространстве наблюдателя) зависит от интегрируемости связности (определяется коэффициентом аффинной связности (символом Кристоффеля)).

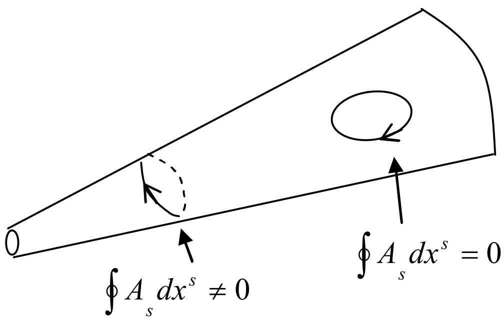

рис.4

[3] Дифференцирование скаляров не коммутативно только в экзотической геометрии Вейля.

В локально плоском пространстве связность неголономна только при обходе малого периметра пространства, замкнутого вдоль скрытой координаты. В этом случае, интеграл отличен от нуля и имеет место "набег" фазы, пропорциональный действию x^h:

$$x^h = -\frac{e}{c}\oint A_s dx^s \qquad (8)$$

Следует заметить, что проблема расходимостей в подобных построениях отсутствует, так как, петли с отличным от нуля интегралом никогда не стягиваются в точку, а класс стягиваемых петель не вносит вклада в поле.

Одной из проблем космологии является вопрос о топологии пространства-времени Вселенной, как четырехмерного многообразия. Легко видеть, что проективная, гиперповерхность $\{x^\alpha, x^t\}$ (арена субъективной физической реальности) должна быть неориентируемой. Это следует из известной теоремы о том, что любое проективное пространство RP(n) четной размерности n неориентируемо [11]. Действительно, рассматриваемая в предыдущем параграфе проекция объективного многообразия M^4 (в пятимерном пространстве $\{t, x, y, z, x^h\}$) представляет собой четырехмерное неориентируемое многообразие RP(4), подобно тому, как проективный образ двухмерного компактного многообразия дает проективную плоскость RP(2) (лист Мебиуса без края). Мы предполагаем, что геометрия, генерирующая группу Лоренца и рассмотренная в предыдущем параграфе, справедлива лишь локально, тогда как, глобально многообразие M^4 гомеоморфно тору T^4, вложенному в R^5. К сожалению, гомотопические типы четырёхмерных компактных топологических многообразий M^4 пока не достаточно изучены. Известно только, что в случае компактной и *односвязной* поверхности M^4 работает аналог гипотезы Пуанкаре (М. Фридман, 1982г). Но это нам ничего не дает, поскольку, по всей видимости, модель Вселенной не может быть односвязной. Тем не менее, между всеми проективными пространствами есть много общего. Так для них фундаментальная группа[4] равна $\pi_1(RP^n) = Z_2$; $n > 1$ (Понятно, что $\pi_1(RP^1) = Z$). Поэтому, $\pi_1(RP^4) = Z_2$ [16]. Здесь Z_2- группа чисел по модулю 2. К тому же все четномерные проективные пространства неориентируемы. Первое означает то, что на это пространство не может "намотаться" более одного витка траектории не "соскальзывая". Для наглядности приведем пример 2-х мерных многообразий с аналогичными свойствами. На тор T^2 можно намотать либо по меридианам, либо по параллелям какое угодно целое число витков. Это означает, что его фундаментальная группа $\pi_1(T^2) = Z \otimes Z$. Здесь Z- группа целых чисел (квантование?). На сферу S^2 невозможно намотать ни одного витка, так как любая петля стягивается в точку (соскальзывает). Соответственно ее фундаментальная группа тривиальна $\pi_1(S^2) = 0$. А вот проективные пространства занимают промежуточное место в такой классификации – с них "соскальзывает" только каждый второй виток! Это можно легко показать на примере пространства RP^2 (проективной плоскости). На рис. 3 справа показана модель проективного пространства RP^2 в виде квадрата. Противоположные

[4] Группа гомотопных петель.

стороны отождествлены с переворотом на π. Для сравнения слева модель тора T^2. В этом случае стороны отождествлены без переворота.

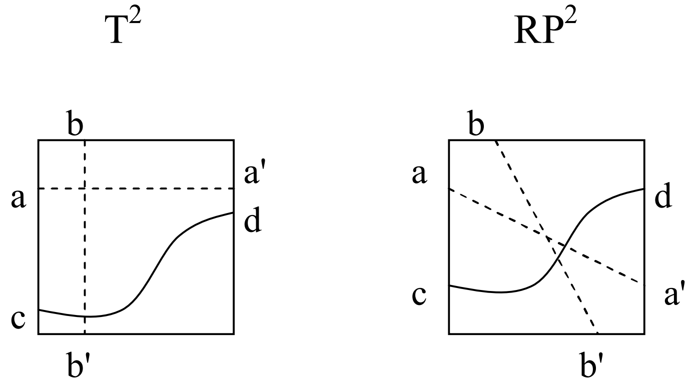

рис.5

Сплошной линией показана петля. Попробуйте теперь стянуть эти петли, перемещая точки вдоль сторон, и вы убедитесь, что сделать это невозможно ни в одном, ни в другом случае. Теперь добавим еще по одному витку. Для тора задача останется по-прежнему неразрешимой, а вот с проективного пространства двойную петлю можно "стащить". Чтобы это увидеть, нужно один из витков постепенно перетягивать на другую сторону от первого витка. На рис. 6 показаны последовательные стадии этого процесса:

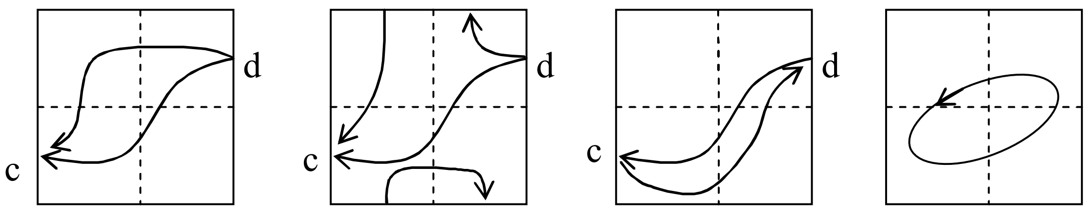

рис.6

Это свойство двулистных накрытий нам известно из физики частиц с полуцелым спином, описывающихся группой SU2 вращений в четырехмерном пространстве, дважды накрывающей группу SO3 трехмерных вращений. По всей видимости, само существование в природе частиц с дробным спином является свидетельством неориентируемости физического многообразия $\{x^\alpha, x^t\}$. Подчеркнем, что по нашему мнению свойства элементарных частиц определяются глобальной топологией Вселенной, а не локальными свойствами пространства, такими, как кривизна, кручение и.т.д, которые задаются полями. Подтверждением тому, что объективное пространство гомеоморфно тору T^4, является тот факт, что ВФ всегда может быть записана в факторизованном виде (9). Если этим компонентам ВФ соответствуют реальные макроскопические движения частицы в пространстве [4], то единственной топологией, удовлетворяющей принципу независимости физических процессов от скрытой координаты, может быть топология тора $T = S^4 \otimes S$. На торе движения по большому и малому кругам независимы. На сфере этому условию удовлетворить невозможно по той же причине, по которой невозможно глобально задать систему координат. Таким образом, метрикоопределяющая поверхность траекторий в пространстве $\{x^s, x^h\}$ (абсолют) должна быть гомотопически эквивалентна тору T^4. Тогда проективным образом тора на субъективное пространство будет 4- мерная поверхность Клейна (бутылка) RP^4. Для наглядности приведем пример двухмерной бутылки Клейна. Как известно, бутылка Клейна не ориентируемая односторонняя поверхность.

RP^2

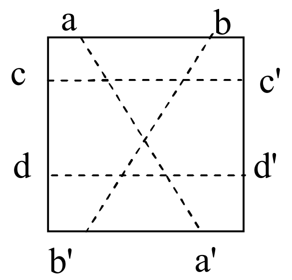

рис.7

Подобно тому, как обычная проективная плоскость получается отождествлением противоположных точек сферы, так же и поверхность Клейна может быть получена склеиванием антиподальных точек тора T^4. При этом поверхность тора дважды покрывает поверхность Клейна.

Заметим, что идеология субъективной физики в основе, которой лежит расслоение $W = S \otimes H$, не содержит в себе регулирующего принципа, согласно которому пространства состояний могли бы быть разбиты на то или иное число протяженных и скрытых степеней свободы:

$$W = \underbrace{x \otimes y \otimes z \otimes t}_{\text{Subj}} \otimes \underbrace{x_1^h \otimes x_2^h \otimes ... \otimes x_N^h}_{\text{Hide}}$$

Поэтому мы не имеем однозначного ответа на вопрос, почему пространство субъекта 4-х мерно и чем определяется характер компактифицированного слоя.

В современных струнных теориях рассматривается компактное многообразие (Calabi-Yau manifold) [17], представляющее собой 6-ти мерный тор над 4-х мерной физической базой. То есть в общей сложности, рассматривается 10-мерное пространство. Такая структура получена решением обратной задачи по наилучшему соответствию с известной нам физикой.

Кривизна пространства, как субъективное свойство

Кривизна объективного пространства R^5 должна быть равна 0 во всех точках (локально). Это следует из того, что кривизна, по сути, является расслоением в дополнительном измерении. Действительно, Риманова кривизна является ни чем иным, как расслоением в пространстве углов. Таким образом, с каждой точкой искривленного пространства связывают число, вектор или тензор. В случае объективного пространства делать этого мы не имеем права, так как каждая точка такого пространства по определению полностью описывает состояние системы.

Число Эйлера (Euler characteristic) для торов любой размерности равно нулю. Поэтому полная кривизна многообразия T^4, вложенного в R^5, согласно теореме **Гаусса – Бонне** [18], так же равна нулю. Однако, здесь мы уже не обязаны требовать чтобы кривизна во всех точках была равна нулю. Если поверхность деформируется, то число Эйлера, будучи топологическим инвариантом, не меняется, в то время как кривизна локально может отличаться от нуля. Поэтому, интеграл Гауссовой кривизны должен сохраняться при любых локальных деформациях. Полная кривизна соответствующей поверхности Клейна RP^4, полученной при отождествлении антиподальных точек тора, так же равна нулю, только глобально. Кривизна субъективной части пространства может отличаться от нуля, как в каждой точке, так и глобально. Однако, в этом случае, комплиментарная часть факторизованного пространства R^5 должна компенсировать эту кривизну.

Примером может служить двухмерный тор, который мы отождествим с объективным пространством $T^2 = S_s^1 \otimes S_h^1$. Для него субъективная часть пространства представляет собой окружность с кривизной $1/R_s \neq 0$, а скрытая компактифицированная часть – окружность с кривизной $1/R_h \neq 0$. Интегральная же кривизна тора, как уже говорилось, равна 0. Экстраполируя выводы, следующие из этого примера на наш мир, мы можем заключить, что кривизна пространства физической Вселенной может определяться характером ее взаимодействия с наблюдателем. Отсюда следует, с одной стороны неожиданный, но, с точки зрения СФ, вполне закономерный вывод, что кривизна пространства является субъективной характеристикой.

Проективно-геометрические основания квантовой механики

Вновь обратимся к принципу 2, согласно которому, мир W факторизуется на субъективную и скрытую части: $W = S \otimes H$, где S – множество физических состояний субъекта (наблюдателя), а H- множество состояний Вселенной недоступных для наблюдения.

Рассмотрим, в качестве простого примера, пространство над $GF(2^3)$. Это 3-х мерное двоичное пространство. В таблице 3 показаны все 8 точек этого пространства, являющиеся вершинами 3-х мерного куба.

Вершины этого куба описывают фундаментальные состояния модели 3-х битного мира W. Запишем все 8 векторов состояний этого мира в виде столбцов матрицы.

$$M=\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccccccc} 0&1&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&1 \end{array}\right] & \begin{array}{c}2^0\\2^1\\2^2\end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad|0\rangle\quad & \quad\quad|1\rangle\quad \end{array} & \end{array} \qquad (9)$$

Очевидно, что вследствие неполноты субъект S не способен различить каждое из этих состояний. Так, например, субъект, состояние которого описывается всего одним битом (здесь мы предполагаем, что старший бит 2^2 относится к субъекту, а биты 2^1, 2^0 к остальной части мира), способен различить только 2 состояния из 8. Обозначим их $|0\rangle$ и $|1\rangle$. На рисунке мы их обвели пунктирной линией. То есть каждое, наблюдаемое им (физическое) состояние представляет собой класс пропорциональных элементов (4-х кратно вырождено). Класс неразличимых или скрытых состояний обозначим $H=\{||0\rangle\rangle,||1\rangle\rangle,||2\rangle\rangle,||3\rangle\rangle\}$. Они задаются комбинациями двух младших битов. Подмножества скрытых состояний, относящиеся к соответствующим субъективным состояниям $|0\rangle$ и $|1\rangle$, представляют собой чистые квантовые состояния в базисе наблюдателя с весами пропорциональными корню квадратному из числа их элементов. Объединение подмножеств скрытых состояний, принадлежащих состояниям $|0\rangle$ и $|1\rangle$ образует суперпозицию базовых состояний [2]. Объективное состояние системы запишем, как тензорное произведение: $\psi=|x\rangle||\varphi\rangle\rangle$. Вектор $||\varphi\rangle\rangle$ вращается в H-пространстве. Объективные состояния $|0\rangle||\varphi\rangle\rangle$ и $|1\rangle||\varphi\rangle\rangle$ это петли[5], описываемые комплексными числами. Состояние $|x\rangle$ называют квантовым. В нашем примере оно является вектором в двухмерном комплексном пространстве (дискретном аналоге Гильбертова пространства). Обратим внимание на то, что переход $|0\rangle\to|1\rangle$ происходит за нулевой интервал физического времени, но длиться в скрытом (объективном) времени. При переходе наблюдателя из состояния $|0\rangle\to|1\rangle$ скрытая часть вселенной, двигаясь по петле H-состояний, совершает полный цикл и возвращается в исходное состояние. Похожий подход к квантовой механике исследует Felix M. Lev [19]. На основе чисто формальных аналогий делается вывод, что квантовые состояния могут быть представлены элементами проективного пространства над полем Галуа, а физические наблюдаемые - операторами, действующими в этом пространстве.

Фундаментальные состояния или элементарные события, "нанизаны" на W-петлю определенную "мировым" алгоритмическим процессом $\Psi(t)$. Эта петля представляет собой нигде не самопересекающуюся (эргодическую) траекторию, заполняющую все пространство состояний. На конечном поле такой петлей является цикл Гамильтона. Например, траектория на двоичном кубе, генерируемая порождающим полиномом x^3+x+1. Петлей в непрерывном объективном пространстве $\{x^i,x^h\}$ называют отображение $\Psi:[0,1]\to\{x^i,x^h\}$ такое, что $\Psi(0)=\Psi(1)=x_0\in\{x^i,x^h\}$. В этом случае $\Psi(t)$ может быть разложена на конечном гармоническом базисе Фурье.

[5] Петлей называют непрерывный образ окружности на поверхность.

$$1 \cdot e^{if_0 t^o} ;\ 1 \cdot e^{i2f_0 t^o} ;\ 1 \cdot e^{i3f_0 t^o} ;\ \dots ;\ 1 \cdot e^{iN^o f_0 t^o} \qquad (10)^6$$

Здесь ϖ_0- основная частота, равная обратной величине периода возврата системы в исходную точку на петле. $N^O \cdot f_0$ - фундаментальная частота, равная обратной величине времени перехода причины в следствие. N^o – число состояний мира (число элементов поля Галуа $N^O = p^n$). t^o - объективное время ($t^o = t + t^h$). Как мы уже говорили, наблюдателю, занимающему часть состояний конечного мира (являющегося субъектом мира), не могут быть доступны каждое из его (мира) состояний. Поэтому, "Природа" для наблюдателя представляться значительно более огрубленной, крупнозернистой, чем есть на самом деле. Если наблюдатель имеет число собственных состояний меньшее N^O, то никаким физическим экспериментом в принципе он не сможет различить две соседние частоты в (10). Другими словами, наблюдатель неизбежно видит мир ренормализованным. Поэтому для того чтобы перейти к субъективному наблюдателю мы должны сгруппировать в (10) члены с неразличимыми наблюдателем частотами в кластеры $\{f^- < f < f^+\}$ и приписать каждому новую частоту $\omega_i \leftrightarrow \{f_i^- < f_i < f_i^+\}$. Число членов в кластере i определяет соответствующий весовой коэффициент a_i.

$$a_0 \cdot e^{i\varpi_0 t} ;\ a_1 \cdot e^{i2\varpi_0 t} ;\ a_2 \cdot e^{i3\varpi_0 t} ;\ \dots ;\ a_M \cdot e^{iN^s \varpi_0 t} \qquad (11)$$

Здесь N^s – число состояний наблюдателя, а t- обычное физическое время. ϖ_0- основная частота, равная обратной величине периода возврата физической Вселенной в исходное состояние (период возврата Пуанкаре). $a_i = \sqrt{\xi_i}$, где ξ_i- степень вырождения соответствующего состояния. Таким образом, вероятность физического состояния мы определили, как неотрицательную аддитивную нормированную меру, заданную над Булевой σ-алгеброй [20] классов объективных состояний.

Новый редуцированный базис, полученный после перенормировки, есть ничто иное, как базис Гильбертова пространства ***физических*** состояний. Например, в координатном представлении ВФ будет иметь вид:

$$\psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{N^s}} \sum_{k=0}^{N^s-1} a_k(x) e^{ik\omega_0 t} \qquad (12)$$

Вероятность определяется просто степенью вырождения (мера вероятности) данного физического состояния x и вычисляется, как скалярное произведение $P = \xi = \psi\psi^*$.

Таким образом, на объективном уровне мироустройства, согласно обсуждаемой модели, нет поля и нет волновых процессов. Уравнение (12) описывает не волну, а некое циклическое

[6] Экспоненты, при необходимости, можно понимать, как обратную функцию дискретного логарифма.

движение точки в объективном пространстве, проецирующееся на физическое пространство-время. Проекция этой траектории уже не является эргодической и может образовывать накладывающиеся или самопересекающиеся петли. На рисунке показана вилка альтернатив в физическом пространстве R^2, являющаяся проекцией эргодической траектории из объективного пространства R^3 фундаментальных состояний.

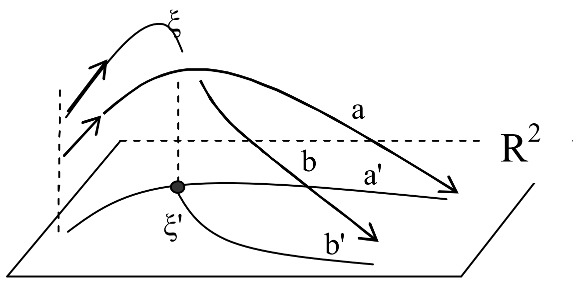

рис.8

Наблюдатель на плоскости R^2 не сможет найти причину того почему система пошла, например, по пути a, а не по пути b (физические траектории) . Для него альтернативы перехода $\xi' \to a'$ и $\xi' \to b'$ неразличимы. "Заглянув" в скрытое измерение, он понял бы, что выбор между альтернативами не случаен и определяется тем, по какой истинной траектории движется система. Но обычный физический (субъективный) наблюдатель вынужден обходиться вероятностным описанием, предоставляемым постулатом фон-Неймана.

Петли с близким периодом T не различимым для наблюдателя, дают весовой вклад в предэкспоненциальный множитель ВФ. Так, что ВФ (12) описывает плотность пространственных осцилляторов (петель), проходящих через данную точку. Рассмотренная структура полностью эквивалентна квантово полевому описанию.

Действие и энергия

Процесс прохождения системой скрытых состояний характеризуется порцией энергии $E = h\nu$. h- постоянная планка. Это соотношение ввел Планк феноменологически. Попробуем, в контексте нашего изложения, выяснить смысл постоянной планка и энергии. Энергия фотона: $E = \frac{h}{T}$, но время T складывается из интервалов $\delta\tau$ перехода между состояниями системы, составляющими петлю. Пусть число состояний фотон-наблюдатель равно N^h, тогда:

$$E = \frac{h}{N^h \delta\tau}. \qquad (13)$$

$\delta\tau$ - минимальный масштаб времени в данной системе. Аналогично, имеет место минимальный масштаб расстояния δx. Отношение этих величин равно скорости света:

$$c = \frac{\delta x}{\delta \tau} \qquad (14)$$

Величины $\delta\tau$ и δx сами по себе не являются универсальными константами, хотя в ситуации, когда объектом по отношению к наблюдателю является вся Вселенная, можно было бы ожидать минимальных величин $\delta\tau$ и δx. В этом случае, не смотря на то, что объективно эти величины отличны от нуля, для субъекта они тождественно равны нулю.
Так как h тоже константа, то энергия цикла (13) определяется исключительно числом состояний N^h, проходимых системой за один цикл, соответствующий 1 витку петли. Обратим внимание, что N^h отличается от полного числа состояний системы, согласно *принципу 2*: $N^{Obj} = N^h N^{Subj}$, где $N^{Obj} = L/\delta x$ – число состояний наблюдателя. Таким образом, фотон, двигаясь по петле длиной L, пропускает часть состояний. Это определяет скорость его движения по петле $V^{Obj} = \dfrac{N^{Obj}c}{N^h} > c$. Длина волны при этом равна $\lambda = N^h \delta x$. То есть, чем меньше состояний (скрытых) фотон реализует за цикл тем больше его энергия и меньше длина волны. Из вышеизложенного следует, что ***энергия характеризует скорость изменения наблюдаемых (субъективных) состояний системы***. Так как эти состояния a priori относятся к самому наблюдателю (субъекту), то энергия, по сути, является макроскопической характеристикой. Величину S=Et называют действием. ***В единицах h действие равно числу наблюдаемых состояний, проходимых системой (например, системой фотон-наблюдатель) за время t.*** За один период T=1/ω система переходит из одного хорошо различимого (квантового) состояния в другое. Марголус пишет [21] "we can say that Et counts orthogonal states in time". SL/h- равна истинному пути, проходимому частицей в пространстве-времени. Поэтому, когда мы для нахождения уравнений движения варьируем действие – мы тем самым варьируем истинный путь частицы. Нахождение минимального действия, по сути, является нахождением геодезической на заданном многообразии. При этом множество возможных наблюдаемых траекторий частицы является классом кривых, ортогональных геодезической.

Принцип неопределенности и смысл преобразования Фурье в квантовой механике

Любая конечная система в классической механике описывается счетным числом степеней свободы, зависящим только от числа частиц. Например (без потери общности будем рассматривать одну координату), точечная материальная частица описывается одной координатой, одним импульсом и временем. То есть систему, содержащую 1 частицу можно охарактеризовать 3-мя числами. В квантовой механике даже одна частица занимает в фазовом пространстве конечный несжимаемый объем. Формально состояние $\psi(p)$ можно связать преобразованием Фурье с координатной функцией $\psi(x)$. О чем говорит такое представление? И почему имеет место именно такая связь? В рассматриваемом контексте эта структура имеет простую интерпретацию. Согласно *принципу 2,* Мир в целом – периодический процесс. Любая его подсистема, в частности сам наблюдатель и изучаемые им объекты, так же описываются периодическими функциями. Если вычислить свертку по какому-либо параметру функций наблюдателя (субъекта) и объекта, то мы получим некий инвариант по этому параметру.

Функция состояния субъекта

Измеряемый субъективный инвариант

Функция состояния объекта

$$\psi(p) = \int \psi(x) e^{ipx} dx \qquad (15)$$

В общем случае, это следствие того, что:

$$f(x-c) \leftrightarrow F(x)e^{2\pi i f c}$$

Здесь F – Фурье образ f. Действительно, сдвиг $x \to x + \Delta x$ в правой части (15) приведет к появлению фазового множителя слева при $\psi(p)$, что не изменяет физическое состояние, определяемое с точностью до фазы[7]. Вспомним, что импульс в классической механике вводится, как инвариант относительно параллельного переноса в пространстве [22], что является частным случаем теоремы Нетер. Поэтому, если пространство однородно, то импульс сохраняется. Такой же смысл импульса и в квантовой механике. Следовательно, выражение (15) можно рассматривать, как определение импульса. Имеет ли смысл определенная координата частицы в импульсном состоянии в рамках рассматриваемой физической картины? Что мы вкладываем в слова – частица в момент времени t имеет координату x? Обычно предполагают, что если в момент времени t наблюдать область пространства: $x - \Delta x < x < x + \Delta x$, то мы наверняка должны обнаружить там частицу. Но природа устроена иначе. Указанный смысл классических координат частицы сохраняется только на объективном уровне реальности не доступном физическому наблюдателю. На физическом же уровне возможен только статистический подход. Так, если частица находится в импульсном состоянии, то вероятность найти ее в точке x распределена равномерно по всему пространству. И это имеет простое объяснение. Дело в том, что частица проходит петлю $\xi(0 < x < L)$ за минимальный промежуток времени $\delta\tau$, распознаваемый субъектом. Его дробление внутри системы невозможно. С точки зрения наблюдателя область пространства, где вероятность обнаружить частицу отлична от нуля, воспринимается им, как заполненная полем. Это важный и не совсем простой момент для понимания. Допустим $\delta\tau^i$ минимальный интервал времени системы i . Если число состояний этой системы (наблюдатель + объект i) меньше числа состояний Вселенной, что справедливо почти всегда, то найдется система (наблюдатель + объект j), для которой $\delta\tau^j < \delta\tau^i$. Поэтому, дело не в том, что для наблюдателя не доступны времена меньшие $\delta\tau^i$, а в том, что эти времена бессмысленны в отношении его взаимодействия с системой i. В этом понимании, каждая система имеет свой собственный квант времени в общей иерархии масштабов времен: $0 < \delta\tau < \delta\tau^i < \delta\tau^{i+1} < ... < T < \infty$, где $\delta\tau$ - фундаментальный квант времени Вселенной, а T – время цикла Вселенной в системе объективных мер.

[7] Множество неразличимых фаз образует класс эквивалентности или группу $U(1)$ физически неразличимых преобразований вектора состояния системы.

В конечной системе динамические переменные меняются не обязательно по гармоническому закону, но обязательно периодичны. Поэтому и их спектры ограничены. Из (17) следует, что энергия может принимать дискретный ряд значений в интервале: $\frac{h}{n\delta\tau} < E < \frac{h}{\delta\tau}$, где $\delta\tau$ - минимальный интервал времени, свойственный системе, $n = 1,2,3...N^h$ - число скрытых состояний. Другими словами, любая система имеет конечный спектр состояний, простирающийся от $\frac{1}{T} < \omega < \frac{1}{\delta\tau}$. Аналогично, импульс: $\frac{h}{n\delta x} < p < \frac{h}{\delta x}$, где δx - минимальное расстояние. Сопряженные величины E/h,t и p/h,x связаны дискретным преобразованием Фурье. Откуда и следует (в единицах h):

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim 1; \qquad \Delta p \cdot \Delta x \sim 1 \qquad (16, 17)$$

То есть, объем фазового пространства не может быть меньше 1. В теории информации величину $\delta\omega\delta\tau = 1$, где $\delta\omega = 1/T$ называют ячейкой Габора. Прямоугольник со сторонами $\sqrt{N}$ Hz и $\sqrt{N}$ sec можно назвать пространством состояний системы. Его площадь характеризует информационную емкость системы, равную числу ее состояний $\Omega \cdot T \cong N$, где $\Omega = 1/\delta\tau$.

Формально удобно рассмотреть операторы дифференцирования:

$$\hat{E} = -i\frac{\partial}{\partial t}; \qquad \hat{p} = -i\frac{\partial}{\partial x} \qquad (18, 19)$$

Это оператор энергии во временном представлении и оператор импульса в координатном.

Их собственными функциями являются базисные гармонические функции.

И, соответственно, операторы времени и координаты в их собственном представлении:

$$\hat{t} = t; \qquad \hat{x} = x \qquad (20, 21)$$

Легко показать, что они не коммутируют: $\hat{E}\hat{t} - \hat{t}\hat{E} = -i$. Но это не имеет ни какого отношения к квантовой механике. Принцип неопределенности не является особенностью, свойственной только квантовой механике. Он справедлив для любых пар сопряженных величин.

Прообраз принципа неопределенности имеет место и в классической Гамильтоновой механике. Из теоремы Лиувилля [22], утверждающей сохранение объема фазового пространства следует, что растяжение фазового пространства вдоль пространственных координат должно приводить к сужению его вдоль импульсных координат. Правда, минимальный объем фазовой ячейки здесь ни чем не лимитирован. Эти параллели между квантовой и Гамильтоновой механикой не случайны. По всей видимости, квантовая механика может быть построена из классической путем добавления к последней аксиом субъективной физики, детализирующих структуру пространства состояний (*Принципы 1, 2*). Эти принципы ограничивают характер движения замкнутыми траекториями с топологией n-мерного тора по числу степеней свободы системы. В связи с этим интересно рассмотреть вопрос – почему Гамильтонова механика, (еще не пополненная указанными аксиомами), так же генерирует топологию тора (в координатах действие угол для первых интегралов устойчивых решений) [23]? Дело, по-видимому, в том, что бимодальная структура Гамильтоновой механики, разбивающей множество свободных переменных на 2 сопряженных класса (импульсы и координаты), уже отражает субъект - объектную природу физики. Уравнения же квантовой механики наследуют эту структуру (принцип соответствия), от объективной динамики, где ее смысл очевиден. Смотрите, например, формулу (15). Следует обратить внимание на то, что *принципы 1 и 2* допускают только узкий класс – интегрируемых Гамильтоновых систем, траектории которых замкнуты [24] и имеют моды с рациональным отношением частот $\varpi_i / \varpi_k = n_i / n_k$, где $(n_i, n_k \in N)$. Эти требования, кажущиеся искусственными, обусловлены тем, что, для простоты, мы используем математический анализ, работающий над действительным полем, и поэтому, допускающий неустойчивое хаотическое поведение не свойственное природе на фундаментальном уровне. При использовании дискретной математики, требование рациональности отношений частот заменяется требованием их взаимной простоты. При этом все траектории устойчивы и образуют легко характеризуемые множества.

Обсуждение

Интересно сравнить идею субъективной физики (СФ) с широко известной и достаточно глубоко разработанной теорией струн (ТС).
Не смотря на то, что, как утверждается, ТС не содержит свободных параметров и тем самым гораздо ближе к объяснению мира, чем стандартная модель, тем не менее, никто не может дать ответ на то, что такое сама теория струн? Почему именно струны? Почему 11 измерений? Что стоит за идеей компактификации? Находясь на начальной стадии разработки СФ тем не менее, отвечает на ключевой вопрос – что стоит за философией компактификации Калуцы - Клейна, лежащей в основе теории струн. Важнейшим общим элементом обоих теорий является скрытое пространство с дополнительными измерениями и компактифицированной метрикой. Однако их отношение к этой важнейшей для современной физики идее, восходящей к пионерским работам Калуцы и Клейна, различно. В отличие от теории струн, принимающей идеи многомерия и компактификации без объяснений, как факт, парадигма субъективной физики дает ключ к их обоснованию.
Как известно, теория струн строится по классической схеме – квантования классического прототипа. Квантовая релятивистская теории вносится в нее "руками" и поэтому, все проблемы и противоречия, связанные с квантовой нелокальностью, передаются ей по наследству. В отличие от этого, теория субъективной физики исходит из первых принципов и предполагает обоснование самой квантовой механики и релятивизма. Общим моментом для СФ и ТС является отказ от точечных частиц и замена их на некоторые нелокальные фундаментальные структуры. В ТС это – струны и браны, а в СФ – петлевые траектории частиц в скрытом времени, заметающие в своем движении разные гиперповерхности, вложенные в объективное пространство. Таким образом, в обоих построениях частицы заменяются некими квазиполевыми нелокальными объектами. Однако, существенная разница в том, что струны делокализованы на планковском масштабе, тогда, как петли СФ (траектории в скрытом времени) полностью делокализованы, на макромасштабе мирового листа. Это позволяет очень естественно объяснять квантовые корреляции и согласованно описывать коллапс ВФ, не входя в противоречие со СТО. Фиксация частиц на 3-х мерной бране в ТС так же имеет естественное обоснование в рамках СФ. Действительно, наше 3-х мерное пространство это пространство состояний наблюдателя (субъективное

пространство). Тогда, как струны в скрытом компактном многообразии – это состояния объекта (частицы). Очевидно, что объект наблюдаем только в точках "встречи" с наблюдателем, то есть на поверхности браны.

Приложение

Проективные геометрии на конечных полях

Известно, что кольцо вычетов (остатков от деления) по модулю P при условии, что P – простое образует поле. Доказательство крайне просто – Пусть a – элемент кольца, тогда $a \cdot n \bmod P$ где $n \in Z$ пробегает все элементы кольца и, в частности, через его 1. Значит для любого "a" есть обратный элемент в этом же кольце $a \cdot a^{-1} = 1$.
Э.Галуа рассматривал классы многочленов степени $n \in N$, являющиеся вычетами от деления на некоторый простой многочлен P. Он показал, что классы таких многочленов образуют конечные поля и что на этих полях сохраняются обычные свойства арифметических операций над вещественным полем R. Их обозначают, как $GF(p^n)$ здесь p- простое, n- натуральное. Поле $GF(p^n)$ можно рассматривать, как n-мерное векторное поле над $GF(p)$

В общем случае расширенное поле Галуа $GF(p^m)$, образуется прямым произведением m экземпляров поля $GF(p)$, где p – простое число, называемое характеристикой, а m – натуральное. Поле $GF(p^m)$ можно рассматривать, как m–мерное векторное пространство, на котором могут быть определены так же и операции умножения векторов.

Если Канторовские актуальные бесконечности являются лишь абстракцией, и природа – конечна, то в основу ультимативной теории мироустройства с необходимостью должны быть положены геометрии над конечными полями Галуа. Рассмотрим несколько простейших конечных геометрий.

Над полем $GF(2^1)$

0	00	0
x^0	01	1

таблица 1.

можно построить самый простой вырожденный случай геометрии. Она представляет собой проективную точку и не содержит ни одной прямой. Эта точка замкнута сама на себя. Нулевой элемент отбрасывается. Отбрасывание нулевого элемента приобретает особый смысл в геометрической интерпретации.

Геометрию следующего уровня можно построить над простейшим расширением предыдущего поля $GF(2^1) \to GF(2^2)$ - это поле состоит из 4-х элементов.

0	00	0
x^0	01	1
x^1	10	x
x^2	11	x+1

таблица 2.

В данном случае элементами поля являются многочлены - остатки от деления на неприводимый многочлен $\mathrm{mod} = x^2 + x + 1$ (111). Напомним, что остатки всегда имеют степень на 1ниже, чем делитель. На этом поле действуют обычные операции сложения и умножения (по модулю). Например, умножив элемент 10 на 11 получим элемент из той же группы 01

$$\begin{array}{rr} * & x+1 \\ & x \\ \hline & x^2+x \\ - & x^2+x+1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

В этом поле, состоящем из четырех элементов, число x является порождающим элементом. Умножение на x отображает любой не равный 0 элемент этого поля на элемент, условно расположенный справа от него. Умножение же на обратный элемент $x+1=1/x$, приводит к элементу, расположенному слева. То есть, мы можем рассматривать 2 оператора $R = x$ и $L = x+1$, действие которых на кольце элементов сводится к повороту по или против часовой стрелки, соответственно.

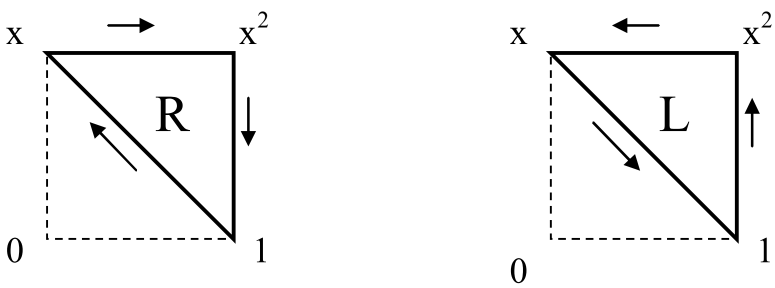

рис.1

Заметим так же, что $(x)^2 = x^2$, а $(x^2)^2 = x$. Здесь возможна интересная геометрическая интерпретация. Заметим, что поле элементов (пропорциональные пары), образует проективную прямую. Эта прямая содержит 3 точки. Удаление одной из точек (несобственный элемент см. ниже) превращает проективную геометрию в афинную. В такой афинной геометрии всего 2 точки и одна прямая ими образуемая.

Интереснее, однако, рассмотреть следующую ступень расширения – поле $GF(2^3)$, образуемое порождающими полиномами $x^3 + x + 1$ или на $x^3 + x^2 + 1$ и состоящее из 8 элементов:

0	000	0	000	0
x^0	001	1	001	1
x^1	010	x	010	x
x^2	100	x^2	100	x^2
x^3	011	x+1	101	x^2+1
x^4	110	x^2+x	111	x^2+x+1
x^5	111	x^2+x+1	011	x+1
x^6	101	x^2+1	110	x^2+x

таблица 3.

Группы, образуемые разными неприводимыми полиномами, очевидно изоморфны.

На этой геометрии уже в полной мере может быть проверена проективная аксиоматика. Здесь мы имеем проективную плоскость, так как поле представлено пропорциональными тройками. Напомним, что каждая прямая в афинном пространстве $\mathbf{A}^3$ однозначно определяет точку на проективной плоскости $\mathbf{P}^2$. В нашем примере мы имеем проективную плоскость, состоящую из 7 точек и 7 прямых, каждая из которых содержит по 3 точки (плоскость Фано).

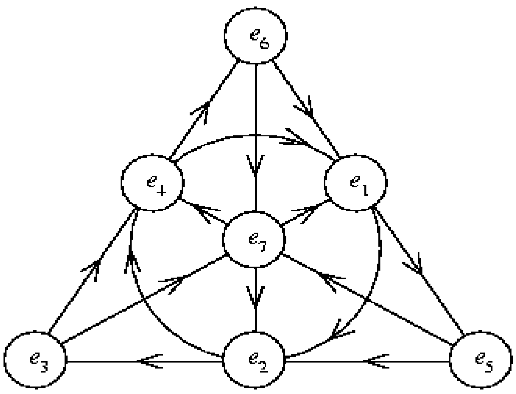

рис.2

Любопытно, что эта плоскость обладает группой симметрии октанионной алгебры, нашедшей применение в теории струн. Октонионы имеют восемь единичных элементов в соответствии с числом элементов поля $GF(2^3)$: обычную действительную единицу (ноль поля $GF(2^3)$) и семь других, которые называются e1,e2, и так далее до e7, образующие элементы проективного пространства над $GF(2^3)$.

Сумма 2-х точек, лежащих на прямой, дает 3-ю точку. Например, прямые с точками $\{101\}$, $\{111\}$ и $\{100\}$, $\{110\}$ имеют общую точку $\{010\}$ и.т.д. Легко проверить, что все прямые пересекаются, как и должно быть в проективной геометрии. Рассматриваемое построение можно распространить на большие размерности пространства.
Изъятие из проективного пространства, так называемого, бесконечно удаленного (несобственного) элемента (для проективной плоскости это прямая) приводит к афинной геометрии. Понселе обратно получил проективное пространство из обычного, добавив "бесконечно удаленные элементы". Для того, чтобы, действительно, перейти к проективной геометрии, таким образом, необходимо было уравнять в правах искусственно введенные бесконечно удаленные точки с обычными. Большую роль в построении проективной геометрии сыграли работы К. фон Штаудта (1798-1867).

Литература

1. А.В. Каминский. Моделирование физики в условиях неполноты. Квантовая Магия, том 1, вып. 3, стр. 3126-3149, 2004
2. А.В. Каминский. Анатомия квантовой суперпозиции. Квантовая Магия, том 3, вып. 1, стр. 1130-1142, 2006.
3. А.В. Каминский. Интерпретация экспериментов с фотонами в терминах субъективной физики. Квантовая Магия, том 5, вып. 4, стр. 4101-4120, 200
4. А.В. Каминский. Механика квантовой механики. Квантовая Магия, том 5, вып. 4, стр. 4121-4131, 2008.
5. А.В. Каминский. О скрытой природе спина. Квантовая Магия, том 2, вып. 2, стр. 2114-2131, 2005
6. А.В. Каминский. Скрытое пространство время в физике. Квантовая Магия, том 2, вып. 1 , стр. 1101-1125 , 200
7. Kurt Godel, "Uber formal unentscheidbare Satze der Pincipia Mathematica undverwandter Systeme I", Monatshefte fur Mathematik und Physik, 38, 173-198, 1931
8. В.А.Намиот, Д.С.Чернавский “Непредсказуемость квантового мира и логические катастрофы"
9. А.К. Цих. Многообразие геометрий. Сороссовский образовательный журнал. вып. 2, 1999г. Смотрите так же: http://en.wikipedia.org/wiki/Projective_geometry
10. Кокстер Г.С.М. Действительная проективная плоскость. -М:Физматгиз, 1959
11. D.Hilbert und S. Cohn-Vossen Anschauliche Geometrie. Berlin Verlag von J. Springer 1932. Перевод: http://math.ru/lib/files/djvu/geometry/kon-fossen.djvu
12. Kaluza Th.— Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss. Math, und Phys. K.1., 1921, S. 966
13. Сборник «Альберт Эйнштейн и теория гравитации». - М.: Мир, 1979, 592 с
14. А. Ходос. Теории Калуцы – Клейна. Обзор. УФН, Том 146, вып 4, 1985г.
15. Румер Ю.Б., Исследования по 5-оптике, Физматгиз, М., 1956
16. М.А. Ольшанецкий. Краткий путеводитель для физиков по современной геометрии. УФН. том 13, вып. 3, 1982г.
17. http://en.wikipedia.org/wiki/String_theory
18. http://mathworld.wolfram.com/Gauss-BonnetFormula.html
19. Felix M. Lev. "Why is quantum physics based on complex numbers?" arXiv:hep-th/0309003 v1 29 Aug 2003
20. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М., ГНТИ, 1936.

21. Norman Margolus. "Looking at Nature as a Computer". International Journal of Theoretical Physics, Vol. 42, No. 2, February 2003 (C ° 2003)
22. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика. т1. стр. 188.
23. Г. М. Заславский, В. В. Чириков 1971 г. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний   Том 105, вып. УФН
24. Арнольд В. И. «Математические методы классической механики», из. 5-ое, М.:Едиториал УРСС, 2003, ISBN 5-354-00341-5