

Бомовское расщепление уравнения Шредингера на два уравнения, описывающих эволюцию реальных функций.

В.И. Сбитнев¹

(Получена 7 января 2008; опубликована 15 января 2008)

Д. Бом предложил расщепление комплексного уравнения Шредингера на два уравнения, каждое из которых имеет дело с реальными функциями – действие и плотность вероятности. Первое уравнение представляет модифицированное квантовым потенциалом (квантовым корректором) уравнение Гамильтона-Якоби. Оно описывает действие. Второе уравнение представляет уравнение непрерывности плотности вероятности. Вводится энтропия как отрицательный логарифм плотности вероятности. На основе этой энтропии квантовый корректор раскладывается на два члена – кинетический и потенциальный. Кинетический член расслаивает импульс частицы \vec{p} на два, \vec{p}_+ и \vec{p}_- . Это расслоение происходит в каждой точке пространства и аналогично двойному лучепреломлению в анизотропных средах. Классическим иллюстративным примером, представленным здесь, является рассеяние плоской волны на двух щелевом экране.

“... то, что мы считали пустотой, на самом деле является некоторой средой. Назовем ли мы ее по старому эфиром или более современным словом вакуум, от этого суть дела не меняется”.

Д.И. Блохинцев, в сборнике “Философские вопросы современной физики”, АН СССР, 1959, стр. 393.

Введение

С тех пор, как только были заложены основы нерелятивистской квантовой механики, верификация результатов ее предсказаний регулярно подтверждается в эксперименте. Успехи квантовой механики в познании микромира не оставляют сомнений в корректности ее выкладок. Прежде всего, триумф связывают с предсказательной силой уравнения Шредингера², описывающего эволюцию волновой функции $\psi(\vec{r}, t)$ ³:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(\vec{r}, t) + U(\vec{r})\psi(\vec{r}, t). \quad (1)$$

Данное уравнение описывает поведение квантовой частицы массы m в потенциальном поле $U(\vec{r})$. Волновая функция $\psi(\vec{r}, t)$ является комплексной функцией пространственных координат $\vec{r} = (x, y, z)$ и времени t . Реальной функцией является плотность вероятности

$$\rho(\vec{r}, t) = \psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2. \quad (2)$$

¹ E-mail: valery.sbitnev@gmail.com

² Открыто Шредингером, как говорят, *интуитивно*.

³ Здесь рассматривается самое упрощенное уравнение, позволяющее рассмотреть наиболее важные детали.

Вероятность обнаружить частицу в малом объеме $dV = dx dy dz$ в момент времени t есть $\rho(\vec{r}, t) dx dy dz$. Таким образом, уравнение Шредингера описывает эволюцию комплексной волны $\psi(\vec{r}, t)$, а операция (2) представляет, по существу, факт регистрации частицы в окрестности точки $\vec{r} = (x, y, z)$ в момент времени t с вероятностью $\rho(\vec{r}, t) dx dy dz$.

Решение уравнения Шредингера с заданными краевыми условиями представляет самостоятельную задачу, которая не всегда поддается аналитическим выкладкам. При этом, на всем протяжении триумфального шествия квантовой механики, остается открытым феноменологический вопрос, в каком отношении находятся волновая природа квантово-механического процесса и его корпускулярное проявление. Здесь наслаивается большой пласт проблем [Доронин, 2004(a); 2004(b)], начиная от парадокса Эйнштейна-Подольского-Розена, теории декогеренции, теории запутанных состояний, квантовой теории информации, квантовой телепортации, и вплоть до проблем разума и сознания. Здесь мы не сможем поднять хоть малую часть этих проблем, но заострим внимание на приведении уравнения Шредингера к уравнениям, соприкасающимся с классической механикой. Такое разделение впервые выполнил Давид Бом [Bohm, 1952].

Разделение уравнения Шредингера на два уравнения для реальных функций

Из-за того, что уравнение (1) содержит в левой части мнимую единицу i , оно не может иметь решений в реальных переменных - волновая функция $\psi(\vec{r}, t)$ является комплексной функцией. Давайте представим волновую функцию в форме

$$\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\rho(\vec{r}, t)} \cdot \exp\{i J(\vec{r}, t) / \hbar\}. \quad (3)$$

Обе функции, плотность вероятности $\rho(\vec{r}, t)$ и действие $J(\vec{r}, t)$ ⁴, являются реальными функциями своих аргументов. Мнимая единица i содержится только как множитель в аргументе экспоненты. Подставляя это выражение в уравнение Шредингера (1) получаем

$$\underbrace{-\frac{\partial J}{\partial t} \cdot \psi}_{(a)} + \underbrace{i\hbar \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot \psi}_{(b)} = \underbrace{\frac{1}{2m} (\nabla J)^2 \cdot \psi + U(\vec{r}) \cdot \psi}_{(a)}$$

$$\underbrace{-\frac{i\hbar}{2m} \nabla^2 J \cdot \psi - \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \rho\right) (\nabla J) \cdot \psi}_{(b)} \underbrace{- \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{2\rho} \nabla^2 \rho\right) \cdot \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{2\rho} \nabla \rho\right)^2 \cdot \psi}_{(c)}. \quad (4)$$

Здесь и далее для удобства используются операторы градиента ∇ и лапласиана ∇^2 :

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right\}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (5)$$

⁴ Здесь действие обозначается буквой J вместо принятой S . Последняя далее будет использоваться для обозначения энтропии. Буквой J обозначается цена (cost), т.е., то же самое действие, представленное в уравнении Гамильтона-Якоби-Беллмана, которое применяется в теоретических задачах робототехники, Искусственного Интеллекта [LaValle 2006], а также в проблемных задачах макроэкономики [Sargent, 1987].

Набор $\{i,j,k\}$ представляет тройку ортогональных единичных векторов. Собирая вместе реальные члены (a) и (c), и отдельно мнимые члены (b) в уравнении (4), получаем два связанных уравнения для реальных функций $J(\vec{r},t)$ и $\rho(\vec{r},t)$

$$(a)+(c): \quad -\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\nabla J)^2 + U(\vec{r}) + Q(\vec{r},t), \quad (6)$$

$$(b): \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \nabla J / m) = 0. \quad (7)$$

Представленный в уравнении (6), последний член

$$Q(\vec{r},t) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(\frac{\nabla \rho}{2\rho} \right)^2 - \frac{\nabla^2 \rho}{2\rho} \right) \quad (8)$$

называется *квантовым потенциалом* [Bohm, 1952]. По некоторым соображениям, которые будут очевидны ниже, член $Q(\vec{r},t)$ будем далее называть *квантовым корректором*.

В уравнении (4) квантовый корректор отмечен скобкой (c). Он представляется как поправочный член второй степени разложения по параметру \hbar (постоянная Планка) к членам, входящим с нулевой степенью, помечены скобками (a). Если опустить этот поправочный член, данное уравнение вырождается в классическое уравнение Гамильтона-Якоби. Оно описывает геодезическую траекторию точечной частицы (*геометрической точки*), погруженной в потенциальное поле $U(\vec{r})$. Первый член в этом уравнении, $(\nabla J)^2 / 2m$, представляет кинетическую энергию частицы, $\vec{p}^2 / 2m$. Присутствие дополнительного члена, квантового корректора $Q(\vec{r},t)$, вносит корректировку в потоки геодезических траекторий.

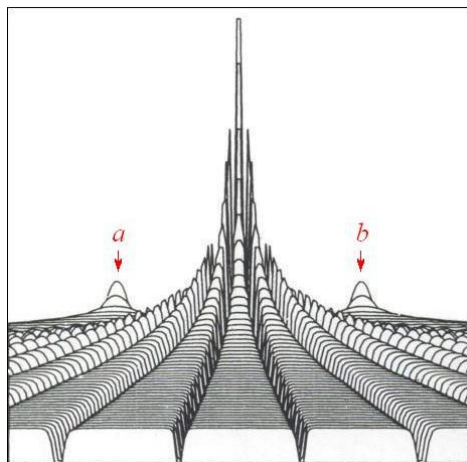


Рис.1
Квантовый потенциал Q в случае интерференционного эксперимента на двух щелях. Положение щелей показано красными стрелками a и b .

На Рис.1 показан квантовый корректор, вычисленный для случая рассеяния плоской волны на двух щелевом экране, положение щелей указано стрелками a и b . Гигантский пик, представленный посередине между щелями, обусловлен интерференцией в ближней зоне двух сферических волн, расходящихся от этих щелей. На Рис.2 показан результат расчета траекторий, прошедших через щели a и b . Оба эти рисунки взяты из работы Бома “Новая теория отношения разума и материи” [Bohm, 1990].

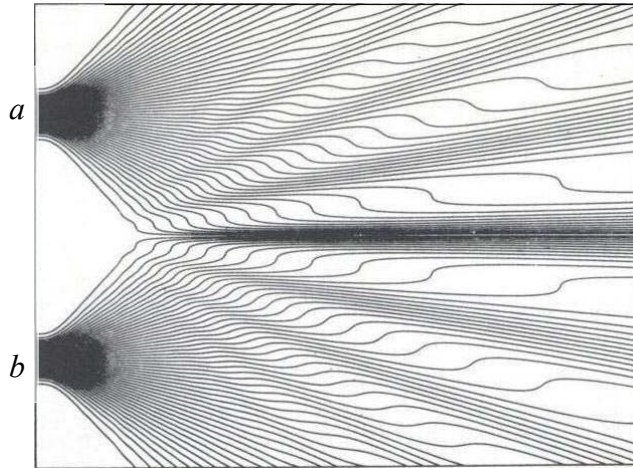


Рис.2
Траектории частиц в двух щелевом интерференционном эксперименте. Местоположение щелей помечено буквами *a* и *b*.

Уравнение (7), в свою очередь, представляет *уравнение непрерывности*. Это уравнение довольно распространено в классической механике. В данном же случае оно описывает движение некоторой квантовой сущности со скоростью

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\nabla J}{m}$$

в направлении $\vec{v}/|\vec{v}|$, импульс есть $\vec{p} = m\vec{v} = \nabla J$. В классической интерпретации, уравнение непрерывности описывает поток плотности частиц идеальной жидкости, который следует из закона сохранения массы [Ланцош, 1965]. Также, уравнение фазовой жидкости может рассматриваться как непрерывная реализация *бесконечно малых канонических преобразований*. Плотность вероятности обнаружения частицы определяется возможностью частицы занять вакантное место в фазовом пространстве. В квантовой реальности, плотность вероятности $\rho(\vec{r}, t)$ также определяет возможность обнаружить частицу в окрестности точки \vec{r} в момент измерения t . В этом контексте можно догадываться, что в квантовом мире должны существовать вакантные места, которые может занимать частица при некоторых обстоятельствах (в момент измерения).

Квантовый корректор как информационный канал

Так как $\rho^{-1} \cdot \nabla \rho = \nabla \ln(\rho)$, давайте выполним ряд математических преобразований квантового корректора $Q(\vec{r}, t)$, представленного уравнением (8):

$$\begin{aligned} Q(\vec{r}, t) &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(\frac{1}{2\rho} \nabla \rho \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \left(\rho \cdot \frac{1}{\rho} \nabla \rho \right) \right) \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(\frac{1}{2} \nabla \ln(\rho) \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \nabla (\rho \nabla \ln(\rho)) \right) \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left(\frac{1}{2} \nabla \ln(\rho) \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \nabla \rho \cdot \nabla \ln(\rho) + \frac{\rho}{\rho} \nabla^2 \ln(\rho) \right) \right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{2} \nabla \ln(\rho) \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{2} \nabla^2 \ln(\rho) \right). \end{aligned}$$

Далее введем логарифмическую функцию

$$S(\vec{r}, t) = -\frac{1}{2} \ln(\rho(\vec{r}, t)) = -\ln(\sqrt{\rho(\vec{r}, t)}). \quad (9)$$

Она имеет смысл энтропии. Так как перед логарифмом отсутствует множитель $\sqrt{\rho(\vec{r}, t)}$, эта энтропия подобна Больцмановской энтропии - она характеризует степень порядка и хаоса некоторой сущности, которая является носителем $\rho(\vec{r}, t)$. Квантовый корректор, выраженный через эту функцию, имеет вид:

$$Q(\vec{r}, t) = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla S)^2}_{(a)} + \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 S}_{(b)}. \quad (10)$$

Здесь первый член, схваченный скобкой (a), представляется как квантовый корректор кинетической энергии $(\nabla J)^2/2m$. Второй член, схваченный скобкой (b), корректирует потенциальную энергию $U(\vec{r})$. Чтобы увидеть эту связь, достаточно разложить $U(\vec{r})$ в ряд Тейлора в окрестности точки минимума (будем полагать минимум в точке $\vec{r} = 0$):

$$U(\vec{r}) \approx U(0) + \frac{1}{2} \nabla^2 U(\vec{r})|_{\vec{r} \rightarrow 0} \cdot r^2 + \dots \quad (11)$$

Лапласиан во втором члене представляет коэффициент разложения потенциала $U(\vec{r})$ в ряд при степени r^2 в окрестности точки минимума. Он пропорционален квадрату частоты колебаний частицы, погруженной в параболическую потенциальную яму (гармонический осциллятор). Коэффициент $\nabla^2 U$ конгруэнтен (сопоставим) лапласиану $\nabla^2 S$.

Уравнение Гамильтона-Якоби (6), модифицированное квантовым корректором (10), может быть переписано в следующем виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial J}{\partial t} &= \underbrace{\frac{1}{2m}(\nabla J)^2}_{(a)} - \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla S)^2}_{(b)} + U(\vec{r}) + \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 S}_{(b)} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2m}(\nabla J + \hbar \nabla S)(\nabla J - \hbar \nabla S)}_{(a)} + \underbrace{U(\vec{r}) + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 S}_{(b)} \end{aligned} \quad (12)$$

Первый член, охваченный скобкой (a), представляет кинетическую энергию. Второй член, охваченный скобкой (b), представляет потенциальную энергию. Таким образом квантовый корректор, представляющий *квантовую внутреннюю энергию* [Takabayasi, 1954; Nasiri, 2006], допускает разложение на кинетическую и потенциальную части. Как следует из последней записи уравнения (12), кинетическая энергия может быть представлена произведением двух квазиимпульсов, p_+ и p_- , смещенных в противоположные стороны на величину $\hbar \nabla S$:

$$\vec{p}_{\pm} = \vec{p} \pm \hbar \nabla S. \quad (13)$$

Здесь $\hbar \nabla S$ представляет расщепление импульса частицы, $\vec{p} = \nabla J$, на \vec{p}_+ и \vec{p}_- , Рис.3.

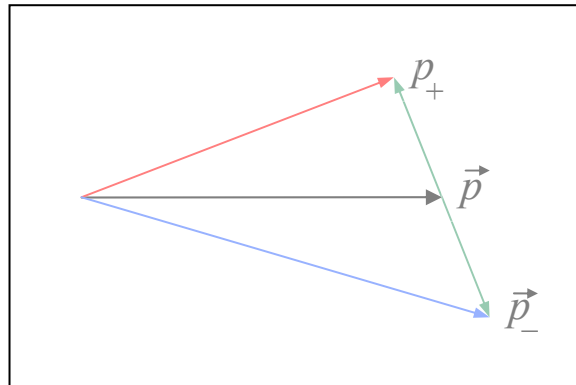


Рис.3

Расщепление импульса \vec{p} на составляющие \vec{p}_+ и \vec{p}_- , обусловленное квантовым корректором кинетической энергии, $\hbar \nabla S$ - показано зелеными стрелками.

Условием расщепления является отличие от нуля градиента плотности вероятности $\rho(\vec{r}, t)$ в окрестности точки \vec{r} . Подобное расщепление имеет место в каждой точке \vec{r} пространства, в любой момент времени t при условии, что $\rho(\vec{r}, t)$ меняется в окрестности этой точки. Картина похожа на двойное лучепреломление света в анизотропных средах. Такая дисперсная среда определяется неоднородным распределением плотности вероятности $\rho(\vec{r}, t)$ по пространству. Плотность вероятности является всего лишь математической абстракцией до тех пор, пока не определены объекты, дающие возможность подвести базис под эту абстракцию. В классической физике такими объектами могут быть, например, малые частицы диспергированные в малом объеме $dV = dx dy dz$ - дым, пар, или взвешенные кристаллики льда, через которые рассеивается солнечный свет. Что касается среды-носителя квантовой плотности вероятности $\rho(\vec{r}, t)$, она заполнена всюду плотно вакантными узлами⁵, позволяющими фиксировать частицу в момент регистрации. Можно полагать, на основе современных знаний, что среда-носитель представляется как сверхпроводящий бозе-конденсат, обеспечивающий мгновенный перенос признаков частицы по различным транспортным каналам.

Давайте перепишем уравнение непрерывности (7), выразив его через новую функцию, энтропию $S(\vec{r}, t)$. Для этого поделим обе части данного уравнение на $\rho(\vec{r}, t)$, и вычислим предварительно все производные типа $\rho^{-1} \nabla \rho = \nabla \ln(\rho)$. В результате, мы получаем уравнение *баланса энтропии* [Wikipedia, 2007]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla S) + (\nabla \vec{v}) = 0. \quad (14)$$

Здесь $\vec{v} = \nabla J / m$ - скорость частицы. Единственный член, представляющий источник энтропии здесь, есть $(\nabla \vec{v})$. Он отличен от нуля в тех областях пространства, где происходят изменения направления движения частицы. Такими областями являются окрестности рассеивателей, какими, например, являются потенциальные барьеры, ямы, дифракционные щели. В этом уравнении отсутствуют источники и стоки энтропии, обусловленные рождением и уничтожением внутри физического объема V новых квантово-механических сущностей, например, рождением или уничтожением дополнительных пар частица-античастица. Так как

⁵ Всюду плотность следует из того факта, что $\rho(\vec{r}, t)$ подчиняется уравнению непрерывности (7).

$$\int_V \rho(\vec{r}, t) dx dy dz = 1, \quad (15)$$

в уравнении (14) отсутствует также член, описывающий поток энтропии через границу, отделяющую этот объем V от остального универсума. Уравнение баланса (14), таким образом, является полным в рамках исходной задачи (1).

Плоская волна и рассеяние на двух щелевом экране

Уравнение Шредингера

$$i \hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(\vec{r}, t). \quad (16)$$

описывает распространение свободной частицы в направлении x . Решение этого уравнения представляет волновую функцию свободно распространяющейся частицы

$$\psi(x, t) = A \exp\{i(kx - \omega t)\} \quad (17)$$

Здесь k - волновой вектор, ω - циклическая частота, $A = \sqrt{\rho}$ - амплитуда вероятности. Более определенно, в согласии с (15), $A = 1/\sqrt{V}$, где V - физический объем системы. Так как $\rho = A^2$ есть константа, квантовый корректор тождественно равен нулю - энтропия (9) является константой на всем протяжении распространения частицы. Это может означать, что сверхпроводящий вакуум находится в абсолютно вырожденном состоянии - отсутствуют какие-либо виртуальные переходы. Иллюстрацией такого состояния мог бы быть классический маятник, состоящий из набора n упругих шаров, свободно подвешенных к жесткой балке, см. Рис.4. Только два шара, левый 1 и правый 8, обнаруживают колебания маятника. Остальные шары передают импульс от левого шара к правому и обратно. Они остаются неподвижными в картине колебаний маятника.

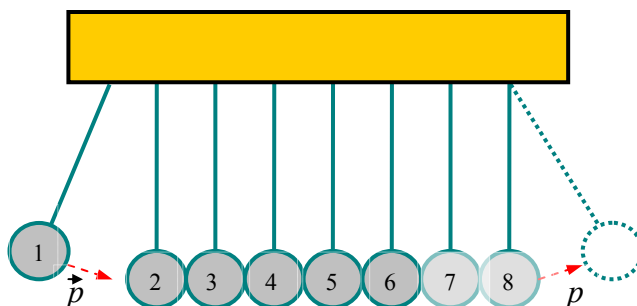


Рис.4
Классический маятник, состоящий из n упругих шаров, повешенных к жесткой балке.

Упругие шары $\{2,3,\dots,7\}$, остающиеся неподвижными при передаче импульса, моделируют среду-посредника. Продолжим эту цепочку до бесконечности. Такая среда-посредник, можно думать, является моделью сверхпроводящих вакуумных состояний. Передача импульса вдоль цепочки представляется как сдвиг фазы в волновой функции.

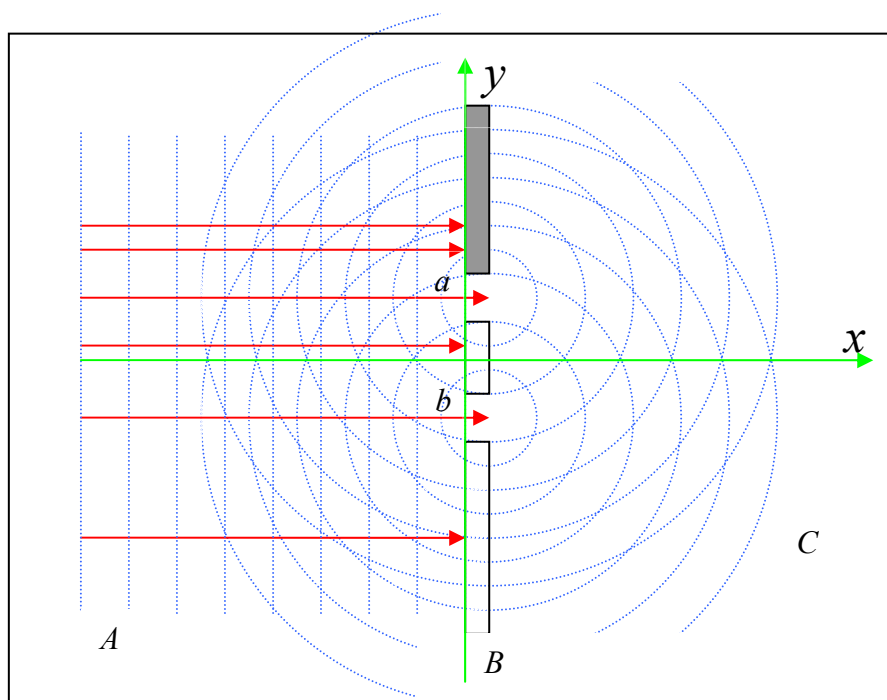


Рис.5
Прохождение плоской волны через область A и рассеивание ее на двух щелях, a и b , на экране B . Результатом рассеяния являются две цилиндрические волны, возникающие позади экрана B , дающие интерференционную картину в области C .

Пусть теперь плоская волна $\psi(x,t)$ падает на экран, бесконечно протяженный в перпендикулярной плоскости к падающей волне. Можно написать условия отражения волны от экрана и прохождения через него. Отраженная и прошедшая волны являются плоскими волнами также. Квантовый корректор в этом случае отсутствует, поскольку не существует областей, где траектории могут расходиться. Исключение составляет только бесконечно-тонкий слой на границе экрана. В этом слое, в предположении абсолютно непроницаемого экрана, квантовый корректор обращается в бесконечность.

Предположим, что в экране существуют две щели вдоль оси y и бесконечно протяженные по оси z , см. Рис.5. Поперечный размер щели Δy должен быть, по крайней мере, порядка длины волны. С точки зрения радиофизики, щель шириной $\lambda/2$ соответствовала бы полуволновому вибратору $\leftarrow \lambda/4 \rightarrow \parallel \leftarrow \lambda/4 \rightarrow$. При подводе энергии к средней части, она может излучать волны с длиной волны λ . В нашем случае, щель, имеющая ширину кратную $\lambda/2$, будет излучать цилиндрические волны⁶.

Щели являются вторичными источниками волн, индуцированными падающей плоской волной. Первичный источник - источник падающей плоской волны удален в отрицательную область по x на бесконечность. Имея волновую функцию $\psi(x,y)$, составленную из суммы всех вышеперечисленных волн, можно вычислить плотность вероятности $\rho(x,y)$, а как следствие и квантовый корректор $Q(x,y)$, см. Рис. 1. В области щелей, показанных стрелками a и b на Рис. 1, квантовый корректор имеет повышенные значения, обусловленные резким изменением плотности вероятности $\rho(x,y)$. В дальней от щелей области плотность вероятности $\rho(x,y)$ выполаживается, но вместе с тем наблюдается интерференционная картина, регистрируемая детектором (фотопластинкой). Она порождается суперпозицией цилиндрических волн⁷ [Ландау и Лифшиц, 1989].

⁶ Цилиндрические потому, что щели прорезаны вдоль оси z от $-\infty$ до $+\infty$.

⁷ На Рис. 5 изображены только половинки цилиндрических волн справа от экрана в области C .

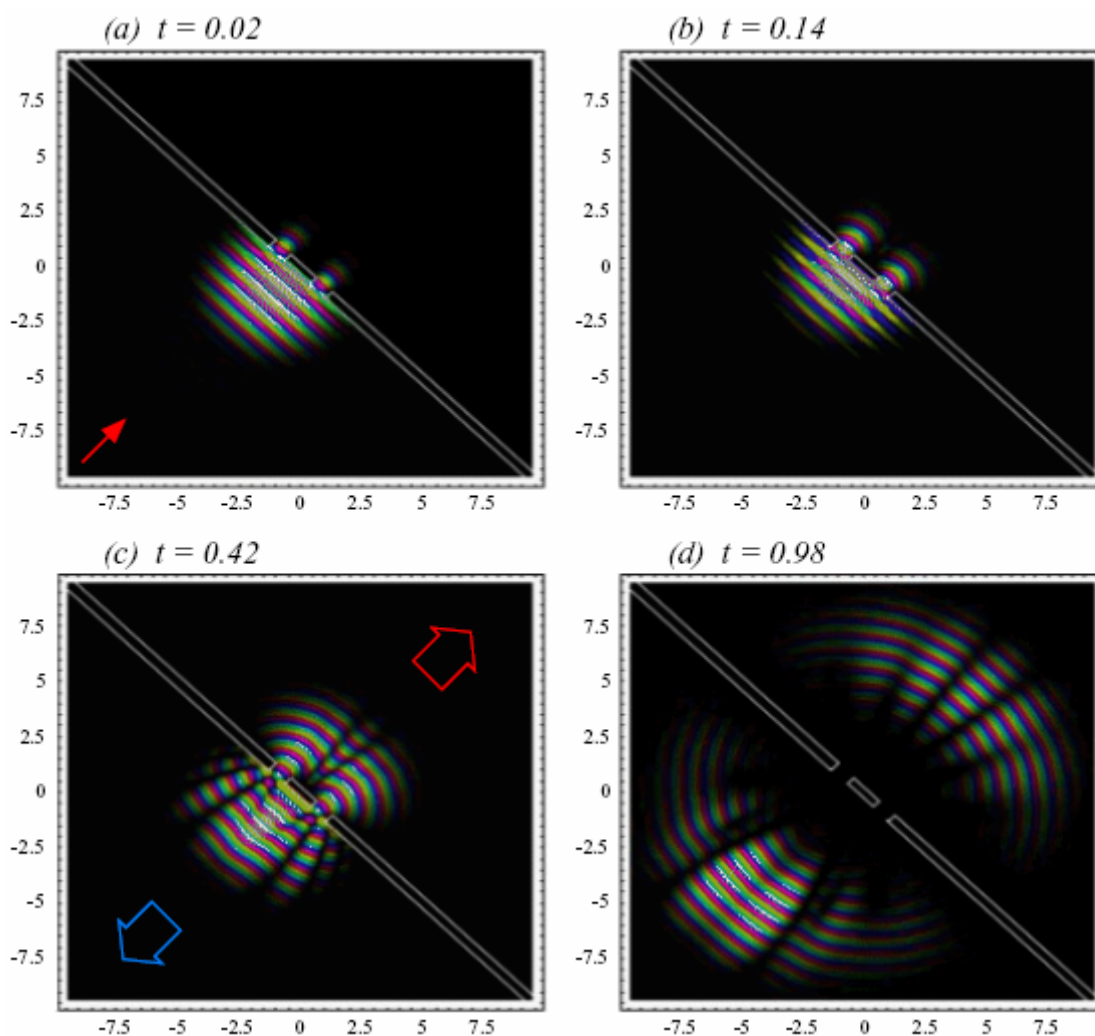


Рис.6
 Рассеяние волнового пакета ψ на экране, имеющего две щели.

При рассеянии на двух щелевом экране, возникающие цилиндрические волны распространяются во всех направлениях в плоскости (x, y) . Так что, наравне с прошедшей волной, существует также и отраженная волна, дающая интерференционную картину в обратном направлении. Рис. 6 показывает расчет уравнения Шредингера, моделирующий интерференцию гауссовского волнового пакета на двух щелях⁸ [Морозов, 2005]. Здесь показаны фрагменты формирования интерференционного паттерна. Рис.6(a) показывает начальную стадию рассеяния на двух щелевом экране гауссовского волнового пакета, приходящего с левого нижнего угла рисунка, показано красной стрелкой. Рис.6(b) показывает начало формирования интерференционного паттерна. На Рис.6(c) видно, что существуют две рассеянные волны - прошедшая волна (ее распространение показано красной стрелкой) и отраженная волна (ее распространение показано синей стрелкой). Обе волны порождают интерференционную картину, Рис.6(d).

Заключение

При моделировании интерференционного паттерна проще решать уравнение Шредингера, а не модифицированное уравнение Гамильтона-Якоби. Представление волновой функции в виде произведения $\psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\rho(\vec{r}, t)} \cdot \exp\{iJ(\vec{r}, t)/\hbar\}$ расчленяет комплексное уравнение

⁸ Рисунок захвачен с мультяшного gif-файла, показанного на <http://phorum.lebedev.ru/viewtopic.php?t=14>

Шредингера на два уравнения для реальных функций. Такое расчленение смотрится как разложение членов уравнения по степеням “малого параметра” $i\hbar$, см. уравнение (4):

- нулевая степень, $(i\hbar)^0 = 1$, выделяет классическое уравнение Гамильтона-Якоби;
- первая степень, $(i\hbar)^1 = i\hbar$, выделяет уравнение непрерывности для плотности вероятности $\rho(\vec{r}, t)$;
- вторая степень, $(i\hbar)^2 = -\hbar^2$, выделяет квантовый корректор для классического уравнения Гамильтона-Якоби.

Первое уравнение, собранное из членов при реальных степенях параметра $i\hbar$ (четные степени), является модифицированным, посредством квантового корректора, уравнением Гамильтона-Якоби. Оно вычисляет действие $J(\vec{r}, t)$. А как результат, вычисляет импульс и энергию частицы. Второе уравнение, собранное из членов при мнимых степенях параметра $i\hbar$ (нечетные степени), есть уравнение непрерывности плотности вероятности $\rho(\vec{r}, t)$. Плотность вероятности проявляет себя в момент измерения как вероятность $\rho(\vec{r}, t)dx dy dz$ обнаружения частицы в момент времени t в окрестности точки \vec{r} .

Если исключить из модифицированного уравнения Гамильтона-Якоби квантовый корректор, а плотность вероятности пусть будет дельта функцией, локализованной в точке \vec{r} в момент времени t , то уравнение Гамильтона-Якоби будет описывать движение классической геометрической точки по геодезической траектории. “Волновая функция” такого вырожденного случая может быть представлена суперпозицией плоских волн по всем волновым векторам \vec{k} и циклическим частотам ω [MathWorld, 2007]:

$$\psi(\vec{r}, t) = \pm \delta(\vec{r})\delta(t) = \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i((\vec{k}\vec{r}) - \omega t)} d\vec{k} d\omega. \quad (18)$$

Таким образом, движущаяся по геодезической траектории геометрическая точка представляется объектом, составленным из суперпозиции бесконечного числа плоских волн. С другой стороны, набор плоских волн для всех \vec{k} и ω , простирающихся от $-\infty$ до $+\infty$, представляется как белый шум. В таком случае, данный объект, в то же время, является локальным источником *белого шума*. Оказывается, белый шум способствует оптимизации траектории при движении классического неживого тела по сложному ландшафту. Что касается живых объектов, существует обширный объем данных, показывающих существование *фликкер-шума*, воспроизводимого этими объектами. По этой причине, модель живой системы, как движущейся геометрической точки, была бы не вполне уместна.

Уравнение Гамильтона-Якоби описывает движение любого классического тела по геодезической траектории. Геометрическая точка в классической механика – это точка, характеризующая распределение масс в теле или системе тел. Иными словами, геометрическая точка представляет центр масс системы. Интересно провести сравнение представления (18) с идеями, изложенными Дорониным в статье [Доронин, 2004(с)]. В этом контексте, классическая геометрическая точка, движущаяся по геодезической траектории, представляется как вырожденное состояние точки сборки в результате декогерентности. А именно, на стр. 10 в выше цитированной работе читаем: “Точки полюса – это чистые классические состояния. Если система находится в одном из этих состояний, то она не будет взаимодействовать с окружением, несмотря на то, что она классическая. … только в этих случаях (для точек полюса) у нас есть классические локальные объекты – во всех остальных случаях (для других точек сферы) локальных

объектов не существует – состояния эти чисто-квантовые.”. Мы видим, волновая функция (18) представлена двумя точками, $+\delta(\vec{r})\delta(t)$ и $-\delta(\vec{r})\delta(t)$, помещенными на противоположных полюсах по отношению друг к другу. Однако, к живому объекту, из-за фликкер-шума, такое представление не применимо.

Литература

- Bohm, D., [1952] "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "Hidden Variables", I", *Physical Review*, **85**, 166-179.
- Bohm, D., [1952] "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "Hidden Variables", II", *Physical Review*, **85**, 180-193.
- Bohm, D., [1990] "A new theory of the relationship of mind and matter", *Philosophical Psychology*, **3**(2), 271-286.
- LaValle, S. M., [2006] *Planning algorithms*, (Cambridge University Press, Cambridge)
- MathWorld, [2007] "Delta Function", <http://mathworld.wolfram.com/DeltaFunction.html>
- Nasiri, S., [2006] "Quantum Potential and Symmetries in Extended Phase Space", *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, **2**, 1-12.
- Sargent, T. J., [1987] *Dynamic Macroeconomic Theory*, (Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, London)
- Takabayasi, T., [1954] "The formulation of quantum mechanics in terms of ensemble in phase space", *Progr. Theor. Phys.*, **11**, 341–373.
- Wikipedia, [2007] "Entropy", <http://en.wikipedia.org/wiki/Entropy>
- Доронин, С. И., [2004(a)] "Роль и значение квантовой теории в свете ее последних достижений", *Квантовая Магия*, **1**(1), 1101-1122.
- Доронин, С. И., [2004(b)] "Мера квантовой запутанности чистых состояний", *Квантовая Магия*, **1**(1), 1123-1137.
- Доронин, С. И., [2004(c)] "Нагуализм с точки зрения квантовой теории", *Квантовая Магия*, **1**(4), 4301-4322.
- Ландау, Л. Д. и Лифшиц, Е. М., [1989] *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, **3**, (Наука, М.) .
- Ланцош, К., [1965] *Вариационные принципы механики*, (Мир, М.)
- Морозов, В. Б., [2005] "Электрон", на форуме www.lebedev.ru, <http://phorum.lebedev.ru/viewtopic.php?t=14>, (6)