Тороподобные поверхности

П.В. Путенихин
m55@mail.ru

(Получена 07 декабря 2012; опубликована 15 января 2013)

Существует большое число поверхностей, на которых осуществляется гиперболическая геометрия Лобачевского. Рассмотрены тороподобные поверхности с локально постоянной отрицательной кривизной.

Известно, что полной и регулярной поверхности, внутренняя геометрия которой представляла бы геометрию полной плоскости Лобачевского, поверхности постоянной отрицательной кривизны не существует [1]:
«не удаётся с помощью ни одной из известных до сих пор поверхностей постоянной отрицательной кривизны осуществить целиком всю плоскость Лобачевского»
«не существует аналитической поверхности постоянной отрицательной кривизны, не имеющей нигде особенностей и повсюду регулярной»
«на ... вопрос о том, можно ли по способу Бельтрами осуществить в евклидовом пространстве на некоторой регулярной аналитической поверхности всю плоскость Лобачевского, надо ответить отрицательно».

Математиками построено множество различных вариантов такой поверхности, самой известной из которых является псевдосфера Бельтрами [2]:

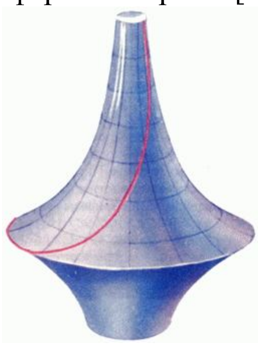

Рис.1. Псевдосфера Бельтрами (нижняя часть симметрична верхней)

Видно, что псевдосфера Бельтрами является замкнутой, как бы конической в две стороны. Рассматривая внимательно эту поверхность, можно заметить, что её название «псевдосфера», не совсем точно отражает её форму. Поверхность больше похожа на внутреннюю часть тора, поэтому название «псевдотор» больше соответствовало бы её виду. У обычного двухмерного тора поверхность имеет как седлообразные участки с отрицательной кривизной, так и сфероподобные участки с положительной кривизной. Можно сказать, что в некоторой степени тор снаружи - это подобие сферического пространства Римана, а внутри - гиперболического пространства Лобачевского [3]:

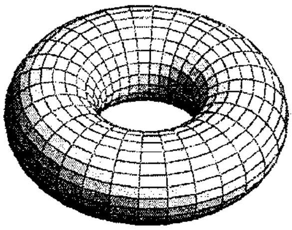

Рис.2. Тор имеет внутреннюю область отрицательной кривизны и внешнюю - положительной.

Если у тора «отрезать» поверхность положительной кривизны, то получится кусок поверхности отрицательной кривизны, отчасти напоминающий псевдосферу Бельтрами. Изгибая его далее, можно получить поверхность постоянной отрицательной кривизны - катеноид [3]:

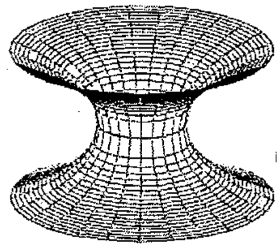

Рис.3. Катеноид напоминает внутреннюю поверхность тора

Как и классический тор, катеноид имеет конечную площадь поверхности. Однако её можно ещё более видоизменить, закрутив спирально [3]:

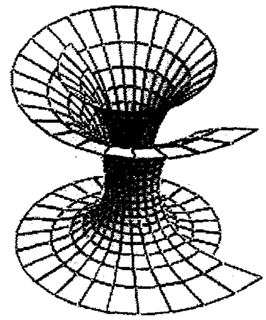

Рис.4. Поверхность Куена может быть получена из разрезанного и затем скрученного тора

Для этого полученный катеноид рассекаем ещё раз – поперёк витка и удлиняем витки в обе стороны, как бы наматывая их друг на друга. Полученная спираль называется поверхностью Куена. Видимо, отрицательная постоянная кривизна получающейся поверхности при бесконечном наматывании внутренняя часть «намотки» сохранится, если поверхность вытягивать до бесконечности вдоль своей оси по вертикали, сжимая в центре в тонкую линию, а другой, внешний виток также скручивая в бесконечно тонкую линию:

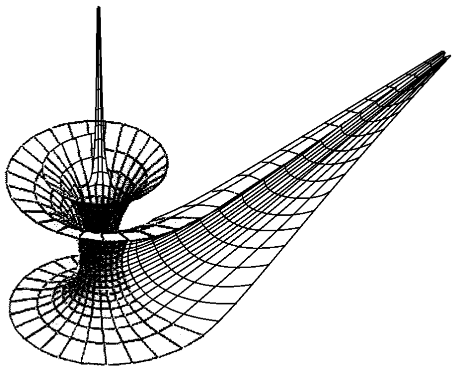

Рис.6. Растянутая поверхность Куена, имеющая постоянную отрицательную кривизну

Напротив, постоянство отрицательной кривизны не сохранится, если поверхность в витках будет повсюду однородной, но с переменным шагом, что исключает её самопересечение внутри. Подобным образом можно свернуть в спираль Архимеда и сам классический тор. Для этого его нужно разрезать поперёк, один из образовавшихся срезов сузить (на конус) и вставить в другой срез, широкий. После этого вытягивать концы в противоположных направлениях (спирально), как бы надевая образовавшиеся трубку на трубку. Поскольку способ образования и вид поверхности напоминает спираль Архимеда, такой «скрученный» тор можно назвать тором Архимеда:

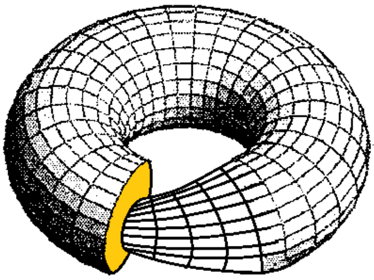

Рис.7. Тор Архимеда - тор, закрученный «сам в себя»

Очевидно, что получающийся многослойный тор будет иметь бесконечно большой диаметр (как наружный, так и внутренней кольцевой оси). Любое его сечение в плоскости центральной, прямой оси будет давать два набора концентрических окружностей:

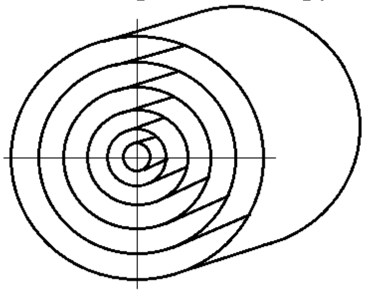

Рис.8. Поперечное сечение тора Архимеда может иметь вид концентрических кругов

Сечение в плоскости тора будет иметь вид сдвоенной спирали Архимеда. Сформировать этот тор можно и другим способом. Для этого нужно взять тонкое кольцо и наматывать на него виток к витку плоскую ленту (со срастанием кромок) слой за слоем. Диаметр и протяжённость внутреннего витка – круговой оси в процессе намотки должны постоянно увеличиваться. Очевидно, поверхность тора Архимеда имеет бесконечную площадь и не ограничена (с торцов). Хотя она и находится «внутри себя самой», она не имеет самопересечений.

Ещё одним вариантом такого закрученного тора является спиральная поверхность, которую за её определённое сходство можно назвать «Двойной улиткой». Две улитки как бы взаимно закручены перпендикулярно друг к другу:

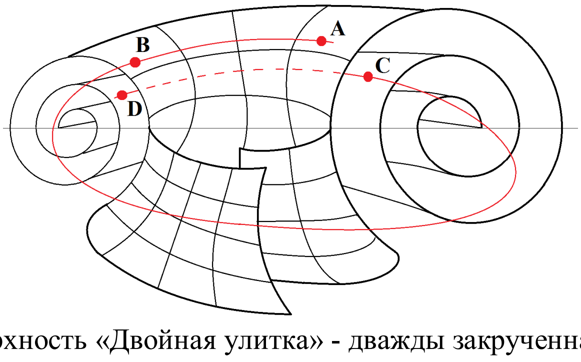

Рис.9. Поверхность «Двойная улитка» - дважды закрученная поверхность тора

В горизонтальной плоскости «улитки» её сечение имеет вид спирали Архимеда. В пределе эта спираль закручивается в точку, а в пространстве - в вертикальную ось поверхности. Это означает, что каждый внутренний лист буквально охватывает все листы из более удалённых от центра витков. Чем ближе виток к центру поверхности, тем дальше в бесконечность он уходит. Линия на поверхности вдоль витка представляет собой коническую спираль Архимеда: движение по линии от точки A через B и C к точке D – это движение по спиральной линии. Диаметр осевого витка (в плоскости «улитки») имеет бесконечную величину. Внутри витков поверхность бесконечно скручивается до нулевого диаметра - осевой линии «бублика». Внешний диаметр стремится к бесконечности.

Строится «Двойная улитка» почти так же, как спиральный тор. Нужно взять тор и разрезать по обеим образующим. Один из концов сузить и вставить в широкий (с небольшой конусностью). Один из поперечных краёв разреза вложить в другой и сворачивать в трубку всё меньшего диаметра, вытягивая его внутрь по спирали. Одновременной внешний слой закручивать и вытягивать над внутренними спиральными витками до бесконечности. Всю «Двойную улитку» можно либо растягивать наружу (витки её будут равномерными, концентрическим), либо сохранять неизменным внутренний диаметр «бублика» (витки будут смещёнными, не концентрическими).

Литература

1. Гильберт Д., «Основания геометрии», пер. с 7-го немецкого издания И.С. Градштейна, под ред. и с вступительной статьёй П.К.Рашевского, Москва - Ленинград, ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948 г.
2. Лобачевского Геометрия, Научная библиотека избранных естественно-научных изданий, научная-библиотека.рф, URL: http://www.sernam.ru/book_e_math.php?id=66 (Дата доступа 07.12.2012)
3. Кривошапко С.Н., Иванов В.Н., Халаби С.М., Аналитические поверхности: материалы по геометрии 500 поверхностей и информация к расчету на прочность тонких оболочек, Наука, 2006 г.
4. Путенихин П.В., Тороподобные поверхности, URL:
   http://econf.rae.ru/article/7159 (Дата доступа 07.12.2012)
   http://samlib.ru/p/putenihin_p_w/tor.shtml (Дата доступа 07.12.2012).